

**Correction de la série : d'exercices**

**PARTIE2 : Equation du second degré à une inconnue**

**Exercice1** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $x^2 = 16$     2)  $x^2 = -8$     3)  $(x + 2)^2 = 9$     4)  $5x^2 - 4x = 0$

**Solution** : 1) L'équation  $x^2 = 16$ .

16 est positif donc l'équation admet deux solutions  $x = \sqrt{16} = 4$  et  $x = -\sqrt{16} = -4$ .

Donc l'ensemble de toutes les solutions est :  $S = \{-4; 4\}$

2) L'équation  $x^2 = -8$ .

-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution

Dans  $\mathbb{R}$ . Donc :  $S = \emptyset$

3) L'équation  $(x + 2)^2 = 9$ . on a alors  $x + 2 = 3$  ou  $x + 2 = -3$ .

L'équation admet deux solutions  $x = 3 - 2 = 1$  et  $x = -3 - 2 = -5$ .

Donc l'ensemble de toutes les solutions est :  $S = \{-5; 1\}$

4)  $5x^2 - 4x = 0$  ssi  $x(5x - 4) = 0$

Soit :  $x = 0$  ou  $5x - 4 = 0$

Soit :  $x = 0$  ou  $x = \frac{4}{5}$  Donc l'ensemble de toutes les solutions est :  $S = \left\{0; \frac{4}{5}\right\}$

**Exercice2** : Calculer le discriminant du trinôme  $3x^2 - x - 2$

**Solution** : Calculons le discriminant :  $a = 3$ ,  $b = -1$  et  $c = -2$  donc :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$$

**Exercice3** : Résoudre les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a)  $2x^2 - x - 6 = 0$     b)  $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$     c)  $x^2 + 3x + 10 = 0$     d)  $6x^2 - x - 1 = 0$

**Solution** : a) Calculons le discriminant de l'équation  $2x^2 - x - 6 = 0$  :

$a = 2$ ,  $b = -1$  et  $c = -6$  donc :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$ .

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

Donc :  $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$  et le trinôme  $2x^2 - x - 6$  a une forme factorisée :

$$2x^2 - x - 6 = a \left( x - \left( -\frac{3}{2} \right) \right) (x - 2) \quad \text{c a d :} \quad 2x^2 - x - 6 = a \left( x + \frac{3}{2} \right) (x - 2)$$

b) Calculons le discriminant de l'équation :  $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$  :  $a = 2$ ,  $b = -3$  et  $c = \frac{9}{8}$

Donc :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$ .

Comme  $\Delta = 0$ , l'équation possède une seule solution (dite double):  $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$

cad :  $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$  et le trinôme  $2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$  a une forme factorisée :  $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2 \left( x - \frac{3}{4} \right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation  $x^2 + 3x + 10 = 0$  :  $a = 1$ ,  $b = 3$  et  $c = 10$

Donc ;  $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$ .

Comme  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède pas de solution réelle cad :  $S = \emptyset$

d)  $6x^2 - x - 1 = 0$   $\Delta = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$  et  $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$  Donc :  $S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$

Et  $R(x) = 6 \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x + \frac{1}{3} \right)$

**Exercice 4** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $6x^2 - 7x - 5 = 0$  2)  $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  3)  $3x^2 + x + 2 = 0$  4)  $4x^2 - 8x + 3 = 0$

5)  $x^2 - 4x + 2 = 0$  6)  $x^2 + 5x + 7 = 0$  7)  $2x^2 - 4x + 6 = 0$  8)  $x^2 - 4x - 21 = 0$

9)  $3x^2 - 6x + 3 = 0$

**Solution** : 1)  $6x^2 - 7x - 5 = 0$   $a = 6$  et  $b = -7$  et  $c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$  et  $x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$  Donc :  $S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{2} \right\}$

2)  $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$   $a = 2$  ;  $b = -2\sqrt{2}$  ;  $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$

Comme  $\Delta = 0$ , l'équation possède une seule solution (dite double):

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  Donc :  $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

3)  $3x^2 + x + 2 = 0$   $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

Comme  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède pas de solution réelle cad :  $S = \emptyset$

4)  $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$   $4x^2 - 8x + 3 = 0$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 4}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{donc : } S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$5) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1}$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } S = \{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$$

$$6) \quad x^2 + 5x + 7 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

Comme  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède pas de solution réelle      cad :  $S = \emptyset$

$$7) \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$$

Comme  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède pas de solution réelle      cad :  $S = \emptyset$

$$8) \quad x^2 - 4x - 21 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{Donc : } S = \{-3, 7\}$$

$$9) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

Comme  $\Delta = 0$ , l'équation possède une seule solution (dite double):

$$x = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1 \quad S = \{1\}$$

**Exercice5** : Factoriser les trinômes :

$$\text{a) } 4x^2 + 19x - 5 \quad \text{b) } 9x^2 - 6x + 1$$

**Solution** : a) On cherche les racines du trinôme  $4x^2 + 19x - 5$  :

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$$

Les racines sont :  $x_1 = \frac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4} = -5$  et  $x_2 = \frac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$

On a donc :  $4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x + 5)(4x - 1)$ .

b) On cherche les racines du trinôme  $9x^2 - 6x + 1$ :

Calcul du discriminant :  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme  $\Delta = 0$ , le trinôme possède une seule racine (dite racine double):  $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$  :

et le trinôme  $9x^2 - 6x + 1$  a une forme factorisée :  $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

**Exercice6** : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)

Si chaque jouet avait coûté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus .

Combien en ai-je acheté ?

**Solution** : Soit  $n$  le nombre de jouets achetés

Et soit  $p$  le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc :  $60 = np$  et  $60 = (n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation :  $n^2 + 3n - 180 = 0$

Calcul du discriminant :  $\Delta = 729 > 0$  Les solutions sont :  $n_1 = \frac{-3 + \sqrt{729}}{2 \times 1} = 12$  et  $n_2 = \frac{-3 - \sqrt{729}}{2 \times 1} = -15$

Nous rejetons  $n_2 = -15$  car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

**Exercice7** : La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470.

Quel est le premier de ces nombres?

**Solution** : Appelons  $x$  le premier de ces trois nombres.  $x$  vérifie l'équation :

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3470$$

$$\text{Donc : } x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 3470$$

$$\text{Donc : } 3x^2 + 6x + 5 = 3470$$

$$\text{C'est-à-dire : } 3x^2 + 6x - 3465 = 0$$

$$\text{Calculons : } \Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-3465) = 36 + 41580 = 41616$$

Les deux valeurs possibles pour  $x$  sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{41616}}{2 \times 3} = \frac{-6 - 204}{6} = \frac{-210}{6} = -35$$

$$\text{Et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{41616}}{2 \times 3} = \frac{-6 + 204}{6} = 33$$

Comme  $x$  est un entier naturel  $x$  est positif le premier des trois nombres est 33.

**Exercice8** : Résoudre les inéquations suivantes

$$\text{a) } 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \quad \text{b) } -2x^2 + 4x - 2 \geq 0 \quad \text{c) } 3x^2 + 6x + 5 < 0$$

**Solution** : a)  $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

Calculons le discriminant :  $a = 2$ ,  $b = -3$  et  $c = 1$  donc :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$x$	$-\infty$	$1/2$	$1$	$+\infty$	
$2x^2 - 3x + 1$	+	0	-	0	+

Donc :  $S = ]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$

b)  $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

Étudions le signe du trinôme de :  $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$   $a = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

Comme  $\Delta = 0$ , le trinôme possède une racine double:  $x_1 = \frac{-(4)}{2 \times (-2)} = 1$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

Donc :  $S = \emptyset$

c)  $3x^2 + 6x + 5 > 0$ . Étudions le signe du trinôme  $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$   $a = 3 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 + 6x + 5$	+	

Donc :  $S = \mathbb{R}$

**Exercice9** : Résoudre les inéquations suivantes : a)  $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$       b)  $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$

c)  $x^2 - 3x - 10 < 0$

**Solution** : a)  $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$   $a = 2$

Calculons le discriminant :  $a = 2$ ,  $b = -4$  et  $c = 6$  donc :  $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 4x + 6$	+	

Par suite :  $S = \mathbb{R}$

b)  $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$   $a = 4$  Étudions le signe du trinôme :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :  $x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$  et  $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

$x$	$-\infty$	$1/2$	$3/2$	$+\infty$	
$3x^2 - 4x + 6$	+	0	-	0	+

Par suite :  $S = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

c)  $x^2 - 3x - 10 < 0$      $\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :  $x_1 = 5$  et  $x_2 = -2$

$x$	$-\infty$	$-2$	$5$	$+\infty$	
$x^2 - 3x - 10$	+	0	-	0	+

Par suite :  $S = ]-2, 5[$

**Exercice 10 :** Résoudre les inéquations suivantes : 1)  $3x^2 + 6x - 9 > 0$

2)  $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

**Solution :** 1)  $3x^2 + 6x - 9 > 0$

- On commence par résoudre l'équation  $3x^2 + 6x - 9 = 0$ . Le discriminant de  $3x^2 + 6x - 9$  est :

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144$ .

Les solutions de l'équation  $3x^2 + 6x - 9 = 0$  sont :  $x_1 = \frac{-6 - \sqrt{144}}{2 \times 3} = \frac{-6 - 12}{6} = -3$  et  $x_2 = \frac{-6 + \sqrt{144}}{2 \times 3} = \frac{-6 + 12}{6} = 1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$	
$3x^2 + 6x - 9$	+	0	-	0	+

$3x^2 + 6x - 9$  Est strictement positif sur les intervalles  $]-\infty; -3[$  et  $]1; +\infty[$ .

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $3x^2 + 6x - 9 > 0$  est donc  $S = ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$ .

2) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes du trinôme :  $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$  Équivaut à  $x^2 + 4x - 7 < 0$

Le discriminant de  $x^2 + 4x - 7$  est

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$  et ses racines sont :  $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$  et  $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-2 - \sqrt{11}$	$-2 + \sqrt{11}$	$+\infty$	
$x^2 + 4x - 7$	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :  $S = ]-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}[$ .