PROF : ATMANI NAJIB

1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF

Cours : Suite numérique Avec Exercices avec solutions

http://www.xriadiat.com/

LES SUITES NUMERIQUES

I) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition : On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$

$u: I \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n) = u_n$

Notation : Si u est une suite numérique définie Sur $\mathbb{N}$

L'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme de rang *n* de la suite

L'entier n s'appelle **l'indice du terme** u_n

La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

2) Suite définie par : une expression explicite

La suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_n = 2n+3 \quad : \forall n \in \mathbb{N}$

1)Calculer : les quatre 1ere termes de la suite$(u_n)_n$

2) Calculer : $u_{n+1} - u_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution :1) $u_0 = 2\times0+3 = 3 \quad u_1 = 2\times1+3 = 5$

$u_1 = 2\times1+3 = 5 \qquad u_3 = 2\times3+3 = 9$

2) $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+3)-(2n+3)$

$u_{n+1} - u_n = 2n+2+3-2n-3 = 2$

Exemple2 : Soit $(v_n)_{n\geq1}$ la suite définie par : $v_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Calculer les 3 premiers termes.

Solution :1) on a $n \in \mathbb{N}^*$

On commence donc par : n=1

Pour n=1 on a: $v_1 = \sqrt{1-1} - \sqrt{1}$

Donc : $v_1 = \sqrt{0} - \sqrt{1} = 0-1 = -1$

Pour n=2 on a: $v_2 = \sqrt{2-1} - \sqrt{2}$

Donc : $v_2 = \sqrt{1} - \sqrt{2} = 1-\sqrt{2}$

Pour n=3 on a: $v_3 = \sqrt{3-1} - \sqrt{3}$

Donc : $v_3 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

3) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Calculer : $u_1; u_2; u_3$

Solution : On a $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour n=0 on a : $u_{0+1} = 5u_0 - 7$ donc $u_1 = 5\times 2 - 7$

Donc : $u_1 = 3$

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = 5u_1 - 7$ donc $u_2 = 5\times 3 - 7$

Donc : $u_2 = 8$

Pour n=2 on a : $u_{2+1} = 5u_2 - 7$ donc $u_3 = 5\times 8 - 7$

Donc : $u_3 = 33$

Remarque : Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

Exemple2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Calculer les 3 premiers termes.

Solution :1) On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Pour n=0 on a : $u_1 = \sqrt{u_0 + 2}$ donc $u_1 = \sqrt{2}$

Pour n=1 on a : $u_2 = \sqrt{u_1 + 2}$ donc $u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour n=2 on a : $u_3 = \sqrt{u_2 + 2}$ donc $u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$

Exercice1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n{}^2 + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer u_1 et u_2 et u_3

Solutions : 1) Calcul de : u_1

Pour n=0 on a : $u_{0+1} = u_0{}^2 + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2\times(-1) + 2 = 1 + -2 + 2 = 1$

2) Calcul de : u_2

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = u_1{}^2 + 2u_1 + 2$

Donc : $u_2 = u_1{}^2 + 2u_1 + 2$

Donc : $u_2 = 1^2 + 2\times 1 + 2 = 1 + 2 + 2 = 5$

3) Calcul de : u_3

Pour n=2 on a : $u_{2+1} = u_2{}^2 + 2u_2 + 2$

Donc : $u_3 = u_2{}^2 + 2u_2 + 2$

Donc : $u_3 = 5^2 + 2\times 5 + 2 = 25 + 10 + 2 = 37$

Exercice1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n}{2u_n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer u_1 et u_2

Solutions : 1) Calcul de : u_1

Pour n=0 on a : $u_{0+1} = \dfrac{7u_0}{2u_0+1} = \dfrac{7\times 1}{2\times 1+1} = \dfrac{7}{3}$

2) Calcul de : u_2

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = \dfrac{7u_1}{2u_1+1}$

Donc : $u_2 = \dfrac{7\times\frac{7}{3}}{2\times\frac{7}{3}+1} = \dfrac{\frac{49}{3}}{\frac{14}{3}+1} = \dfrac{\frac{49}{3}}{\frac{14}{3}+\frac{3}{3}} = \dfrac{\frac{49}{3}}{\frac{17}{3}} = \dfrac{49}{3}\times\dfrac{3}{17} = \dfrac{49}{17}$

II) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

1.1 Définition

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

1 ; 3 ; 5 ; 7 ; … ; …. ; … ;15

-5 ; -2 ; 1 ; 4 ; … …. ;… ;

10 ; 5 ; 0 ; -5 ; … ;…. ;… ;

Activité2 : soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_n = 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer $u_{n+1} - u_n$

Solution : $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+1) - (2n+1)$

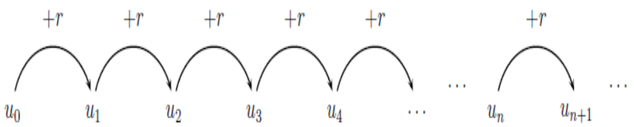
$u_{n+1} - u_n = 2n+2+1-2n-1 = 2 = constante$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$

Définition : On appelle suite **arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = r = constante$

Le réel ***r*** s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Exemple1 : *soient Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et $v_n = n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2) Calculer v_0 et v_1 et v_3 et v_4

3) Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique ? justifier votre réponse

Solution :1) On a : $u_{n+1} = u_n - 3$ donc : $u_{n+1} - u_n = -3$

Donc : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r = −3 et de premier terme $u_0 = 2$

2) $v_0 = 2$; $v_1 = 3$; $v_2 = 6$; $v_3 = 11$; $v_4 = 17$

3) Ainsi : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

1.3. Terme général d'une suite arithmétique : u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel

$$\cancel{u_{p+1}} = u_p + r$$
$$\cancel{u_{p+2}} = \cancel{u_{p+1}} + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$$
$$u_n = u_p + \underbrace{(r + r + \cdots + r)}_{(n-p)termes}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes

On a : $\forall n \in I \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Remarque : Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_0 + nr$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_0 = 1$ et sa raison $r = 3$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_1 et u_2 et u_{2022} et u_{2023}

Solutions : 1) u_n en fonction de n ?

On a : $u_n = u_0 + nr$ D'où : $u_n = 1 + 3n$

2) $u_1 = u_0 + r = 1 + 3 = 4$

$u_2 = u_1 + r = 4 + 3 = 7$

$u_{2022} = 1 + 3 \times 2022 = 6067$

$u_{2023} = 1 + 3 \times 2023 = 6070$

Aussi on peut écrire que : $u_{2023} = u_{2022} + r = 6067 + 3 = 6070$

Exemple2 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_6 = 13$

1) Déterminer sa raison r

2) Déterminer son premier terme u_0 .

3) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 6 et p=1 on a : $u_6 = u_1 + (6-1)r$

Donc : $13 = 3 + 5r \Leftrightarrow 5r = 13 - 3$

Donc : $r = \frac{10}{5} = 2$

2) le terme u_0 ??

Pour n= 1 et p=0 on a :

$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + 2 \Leftrightarrow u_0 = 3 - 2 = 1$

Ou simplement on a : $u_1 = u_0 + r \Leftrightarrow 3 = u_0 + 2 \Leftrightarrow u_0 = 3 - 2 = 1$

3) u_n en fonction de n ?

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Méthode1 : Pour p=1 on a :

$u_n = u_1 + (n-1)\times r \Leftrightarrow u_n = 3 + 2(n-1)$

Donc : $u_n = 3 + 2n - 2$

Donc : $\boxed{u_n = 2n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Méthode1 : Pour p=0 on a :

$u_n = u_0 + (n-0)\times r \Leftrightarrow \boxed{u_n = 1 + 2n}$

Exercice 1: Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_5 = 9$

1) Déterminer sa raison r

2) Déterminer son premier terme u_0.

3) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 5 et p=1 on a : $u_5 = u_1 + (5-1)r$

Donc : $9 = 3 + 4r \Leftrightarrow 4r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

2) le terme u_0 ??

$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

3) u_n en fonction de n ?

$u_n = u_1 + \frac{3}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$

$u_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice 2 : Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on considère la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = 1$

Donc $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

2) écrire u_n en fonction de n

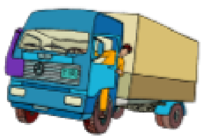
On a $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 + nr = 1 + n \times 1 = 1 + n$

Puisque : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$

Donc : $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{1 + (n+1)}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$

Exercice7 : Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991. L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.



Les nombres de camion forment une suite. $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.
2) Donner la nature de cette suite et préciser le premier terme u_1 et la raison de cette suite.

3) Donner l'expression du nombre u_n de camions que possède l'entreprise l'année n.

4) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2023 ?

Solution :1) On peut dire que **:** $u_1 = 40$ c'est le nombre de camions que possède l'entreprise en 1991

Donc **:** le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992 est : $u_2 = u_1 + 8$

C'est-à-dire : $u_2 = 40 + 8 = 48$ *camions*

Le nombre de camions que possède l'entreprise en 1993 est : $u_3 = u_2 + 8$

C'est-à-dire : $u_3 = 48 + 8 = 56$ *camions*

Le nombre de camions que possède l'entreprise en 1994 est : $u_4 = u_3 + 8$

C'est-à-dire : $u_4 = 56 + 8 = 64$ *camions*

2) a) la nature de cette suite : toujours on ajoute le même nombre : $r = 8$

$u_{n+1} = u_n + 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de $r = 8$ et de premier terme $u_1 = 40$

3) L'expression du nombre u_n de camions que possède l'entreprise l'année n. :

On a : $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de $r = 8$ et de premier terme $u_1 = 40$

Donc : on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : Pour p=1 on a : $u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 40 + 8(n-1)$

Donc : $u_n = 40 + 8n - 8$

Donc : $\boxed{u_n = 8n + 32}$

Remarque : $u_n = 8n + 32$ donc : $u_4 = 8 \times 4 + 32 = 32 + 32 = 64$ (déjà trouvé)

4) le nombre de camions que possède l'entreprise en 2023 est :

1991 est : u_1 1992 est : u_2 1993 est : u_3 1999 est : u_9 2000 est : u_{10}

2001est : u_{11} 2021est : u_{31} 2022est : u_{32} 2023est : u_{33}

Donc : $u_{33} = 8 \times 33 + 32 = 264 + 32 = \boxed{296}$ camions

1.4 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Propriété : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique

p un entier naturel et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$

On a : $S_n = \dfrac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Avec : $n - p + 1$ le nombre des termes de la somme

u_p : le premier terme de la somme

u_n : le dernier terme de la somme

Donc : $S_n = (le\ nombre\ de\ termes)\dfrac{le\ premier\ terme + le\ dernier\ terme}{2}$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme : $u_0 = 5$ et sa raison $r = 3$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_8 et u_{13}

3) Calculer : $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{13}$ **et** $S_2 = u_8 + u_9 + \cdots + u_{13}$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 + nr$

Donc : $u_n = 5 + 3n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 5 + 3n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_8 = 5 + 3 \times 8 = 5 + 24 = 29$ et $u_{13} = 5 + 3 \times 13 = 5 + 39 = 44$

3) Calcul de : $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{13}$

$S_1 = (\text{le nombre de termes})\dfrac{\text{le premier terme} + \text{le dernier terme}}{2}$

$\text{le nombre de termes} = 13 - 0 + 1 = 14$

Donc : $S_1 = 14\dfrac{u_0 + u_{13}}{2} = 7(5+44) = 7\times 49 = 343$

Calcul de : $S_2 = u_8 + u_9 + \cdots + u_{13}$

$S_2 = (\text{le nombre de termes})\dfrac{\text{le premier terme} + \text{le dernier terme}}{2}$

$\text{le nombre de termes} = 13 - 8 + 1 = 6$

Donc : $S_2 = 6\dfrac{u_8 + u_{13}}{2} = 3(29+44) = 3\times 73 = 219$

Exercice : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme : $u_0 = 1$ et sa raison $r = \dfrac{1}{2}$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_3 et u_{30}

3) Calculer : $S = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30}$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 + nr$

Donc : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2}n = 1 + \dfrac{n}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 1 + \dfrac{n}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_3 = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $u_{30} = 1 + \dfrac{30}{2} = 1 + 15 = 16$

3) Calcul de : $S = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30}$

$S = (\text{le nombre de termes})\dfrac{\text{le premier terme} + \text{le dernier terme}}{2}$

$\text{le nombre de termes} = 30 - 3 + 1 = 28$

Donc : $S = 28\dfrac{u_3 + u_{30}}{2} = 14\left(\dfrac{5}{2} + 16\right) = 14\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{32}{2}\right) = 14\times\dfrac{37}{2} = 7\times 37 = 259$

Exercice : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme : $u_1 = 2$ et sa raison $r = -2$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_7 et u_{25}

3) Calculer : $S = u_7 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{25}$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p=1 On a : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Donc : $u_n = 2-2(n-1) = 2-2n+2 = 4-2n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 4-2n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_7 = 4-2\times 7 = 4-14 = -10$ et $u_{25} = 4-2\times 25 = 4-50 = -46$

3) Calcul de : $S = u_7 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{25}$

$$S = (le\ nombre\ de\ termes)\frac{le\ premier\ terme + le\ dernier\ terme}{2}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 25-7+1 = 19$

Donc : $S = 19\frac{u_7 + u_{25}}{2} = 19\frac{-10+(-46)}{2} = 19\frac{-56}{2} = 19\times(-28) = -532$

2) Suite géométrique.

Activité1 : Compléter les suites de nombres suivantes :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; … ;…. ;… ;

1 ; 3 ; 9 ; 27 ; … ; …

$1,\ \frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{-1}{8}$,; … ;…. ;…

2.1 Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$ où q est un réel fixe. Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

Exemple1 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$

1) Calculer u_1 et u_2 et u_3

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

Solution :1) On a : $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$

Pour n=0 on a :$u_{0+1} = 2u_0$ par suite : $u_1 = 2\times 3 = 6$

Pour n=1 on a :$u_{1+1} = 2u_1$ par suite :$u_2 = 2\times 6 = 12$

Pour n=2 on a :$u_{2+1} = 2u_2$ par suite :$u_3 = 2\times 12 = 24$

2) On a : $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$

Exemple2 : Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer v_0 et v_1 et v_2

2) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

Solution :1) On a : $v_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 : on a :$v_0 = 2\times 3^0$ par suite : $v_0 = 2$

Pour n=1 : on a :$v_1 = 2\times 3^1$ par suite : $v_1 = 6$

Pour n=2 : on a :$v_2 = 2\times 3^2$ par suite : $v_2 = 18$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n}=3=q$

Donc la suite est géométrique de raison $q=3$ et son premier terme : $v_0=2$

2.2 Terme général d'une suite géométrique :

Propriété : Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :

$u_n=q^{n-p}u_p \quad \forall n\in I$

Cas particuliers : 1) si p=0 alors : $u_n=q^n u_0$ 2) si p=1 alors : $u_n=q^{n-1}u_1$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_4=\frac{3}{16}$

1) Déterminer sa raison q

2) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=q^{n-p}u_p$

Pour n= 4 et p=1 on a : $u_4=q^{4-1}u_1$

Donc : $\frac{3}{16}=q^3\frac{3}{126}\Leftrightarrow q^3=\frac{1}{8}\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$

2) u_n en fonction de n ?

$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times u_1 \Leftrightarrow u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exemple2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{3-u_n} \\ u_0=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=1-\frac{2}{u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution : 1) $v_{n+1}=1-\frac{2}{u_{n+1}}=1-\frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}}=1-\frac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1}=3\left(1-\frac{2}{u_n}\right)$ Donc $v_{n+1}=3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0=-3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0=-3$

Donc : $v_n=u_0\times q^n \Leftrightarrow v_n=-3\times 3^n=-3^{n+1} \; \forall n\in\mathbb{N}$

Puisque : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$ donc $u_n=\frac{2}{1-v_n}$ Donc : $u_n=\frac{2}{1+3^{n+1}}$

2.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Et $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$ alors : $s_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Régle : $S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\dfrac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme : $u_0 = 3$ et sa raison $q = 2$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_2 et u_5

3) Calculer : $S_1 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$ **et** $S_2 = u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2$

Pour p=0 On a :$u_n = u_0 \times q^{n-0} = u_0 \times q^n = 3\times 2^n$

Donc : $u_n = 3\times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 3\times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_2 = 3\times 2^2 = 3\times 4 = 12$ et $u_5 = 3\times 2^5 = 3\times 32 = 96$

3) a) Calcul de : $S_1 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5-0+1 = 6$

Donc : $S_1 = u_0 \dfrac{1-2^6}{1-2} = 3\dfrac{1-64}{-1} = 3\times\dfrac{-63}{-1} = 3\times 63 = 189$

3) b) Calcul de : $S_2 = u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5-2+1 = 4$

Donc : $S_2 = u_2 \dfrac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$

Donc : $S_2 = u_2 \dfrac{1-16}{1-2} = 12\dfrac{1-2^4}{-1} = 12\times\dfrac{-15}{-1} = 12\times 15 = 180$

Exercice : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = 3u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

1) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer son premier terme et sa raison q

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer u_2 et u_3

4) Calculer : $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

Solution :1) $u_{n+1} = 3u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_n$ est une suite géométrique premier terme : $u_0 = 2$ et sa raison $q = 3$

2) Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 \times q^{n-0} = u_0 \times q^n = 2\times 3^n$

Donc : $u_n = 2\times 3^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) On a : $u_n = 3\times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_2 = 2\times 3^2 = 2\times 9 = 18$ et $u_3 = 2\times u_2 = 2\times 18 = 36$

4) a) Calcul de : $S_5 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5-0+1 = 6$

Donc : $S_5 = u_0 \dfrac{1-3^6}{1-3} = 2\dfrac{1-729}{-2} = (-1)\times(-728) = 728$

Application : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1^{er} juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = ...$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1\times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ donc : $u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait : $s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20} = u_1 \dfrac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$

$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$ Centimes $s_{20} \simeq 1million$ 500dh Joli voyage !