PROF : ATMANI NAJIB
1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF

Exercices de mathématiques sur les FONCTIONS – Généralités et limites et dérivée et étude de fonctions

Avec Correction extrais des examens régionaux et des interrogations

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice1 : 7points (1pt +1pt +1.5pt +1pt+ +1pt 1.5pt) 2007 Tanger Tétouan Al Hoceima 2007(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x \in D_f$; $f'(x)=3x(x-2)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire le tableau de variations de f sur D_f

6) Calculer : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

8) Tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3-3x^2=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-3x^2=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=(x^3-3x^2)'=3x^2-3\times 2x=3x^2-6x=3x(x-2)$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x(x-2)$

$3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=3x^2-6x$ $a=3\succ 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[0;2]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(x)=x^3-3x^2$

Donc : $f(0)=0^3-3\times0^2=0-0=0$

$f(2)=2^3-3\times2^2=8-12=-4$

6) Calcul de : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

On a : $f(x)=x^3-3x^2$

Donc : $f(1)=1^3-3\times1^2=1-3=-2$

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2=-1-3=-4$

$f(3)=3^3-3\times3^2=27-27=0$

7) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 ?
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T): y=f(3)+f'(3)(x-3)$

On a : $f(3)=0$ Et on a : $f'(x)=3x(x-2)$

Donc : $f'(3)=3\times3(3-2)=9\times1=9$

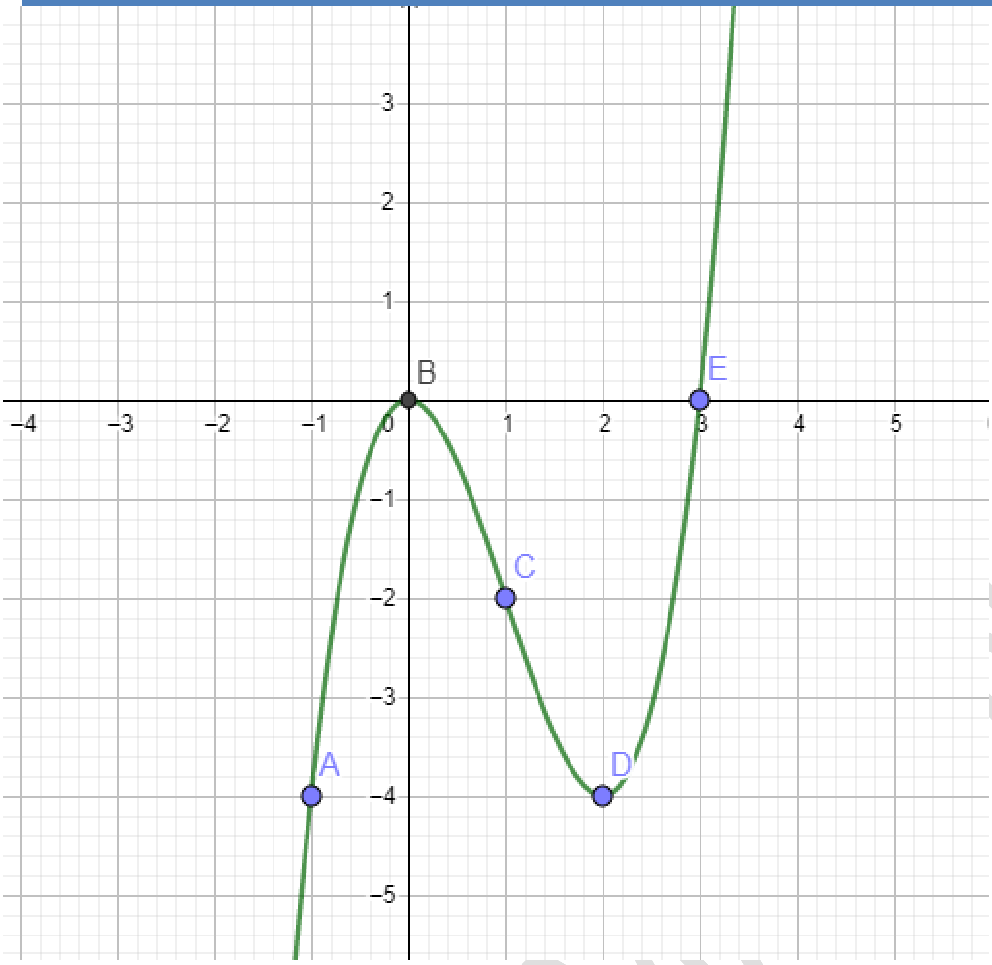
Donc : $(T): y=0+9(x-3)$

Donc : $(T): y=9x-27$

8) Traçage de la courbe (C_f) :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1	2	3	
f(x)	-4	0	-2	-4	0	



Exercice2 : 8points (0.5pt +1.5pt +1.5pt +2pt +1.5pt +1.5pt)
Région CASABLANCA – SETTAT 2008(Session Normale)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-6}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $f\left(\dfrac{-3}{2}\right)$ et $f(0)$

3) Calculer : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x\succ-2}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x\prec-2}} f(x)$

4) a) Vérifier que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{-21}{(3x-6)^2}$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ et donner le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x-6\neq0\}$

$3x-6=0\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{3}=2$

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{3x-6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

a) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x+3}{3x-6}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x+3=2\times 2+3=4+3=7$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=6-6=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x+3=2\times 2+3=4+3=7$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=6-6=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+3}{3x-6}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x+3=7$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

4) Calculer : $\forall x\in\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$; $f'(x)=\left(\dfrac{2x+3}{3x-6}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+3}{3x-6}\right)'=\frac{(2x+3)'(3x-6)-(2x+3)(3x-6)'}{(3x-6)^2}=\frac{2(3x-6)-3\times(2x+3)}{(3x-6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x-12-6x-9}{(3x-6)^2}=\frac{-21}{(3x-6)^2}\succ 0$$

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\left]-\infty;2\right[$ et sur $\left]2;+\infty\right[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$2/3$ ↘ $+\infty$		$-\infty$ ↘ $2/3$

Exercice3 : 8points (1pt +2pt +1.5pt +1pt+ +1pt 1.5pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat)(2012) (Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$

1) Calculer : $f(0)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

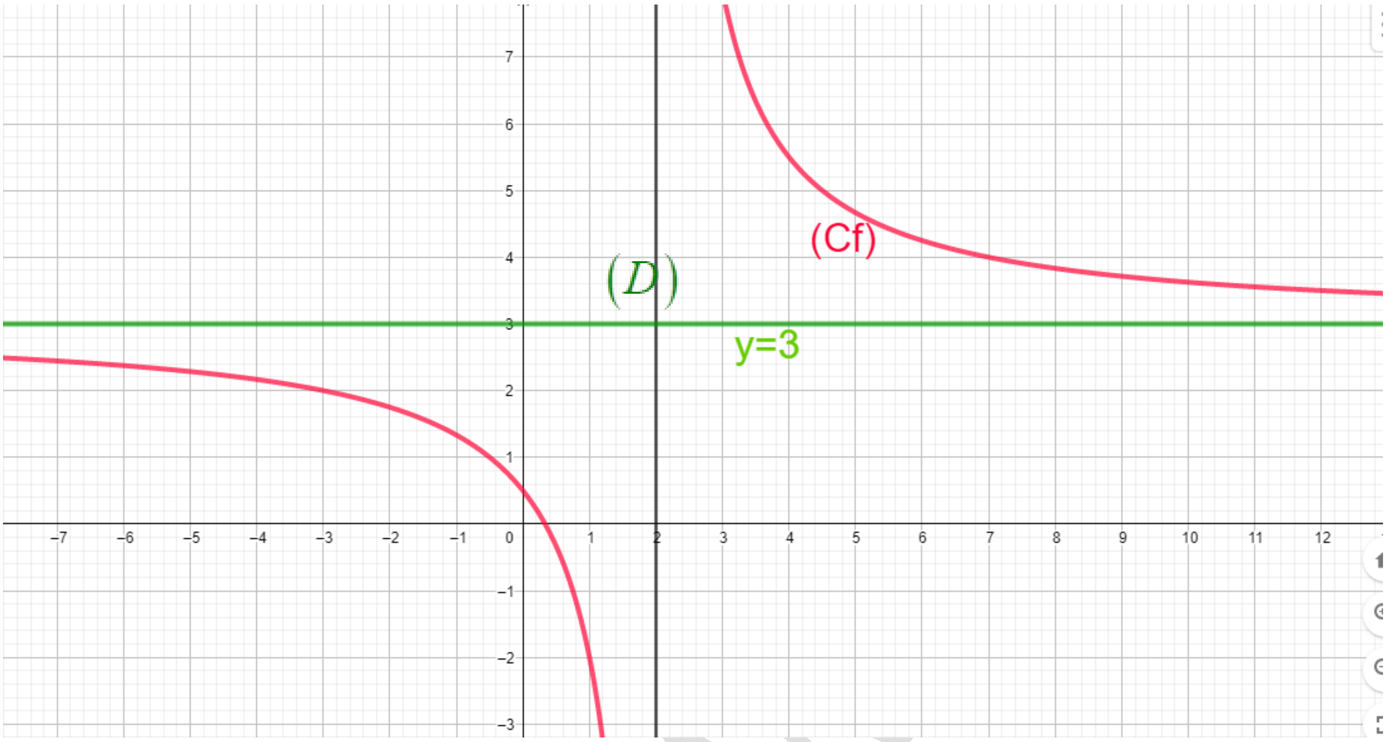
3) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$

4) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}-\{2\}$

5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3

6)La courbe représentatives (C_f) est donnée dans le repère ci-dessous :

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq 3$



Solution : 1) Calcul de : $f(0)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$

On a : $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

Donc : $f(0) = \frac{3\times 0-1}{0-2} = \frac{0-1}{0-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{4}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x-1}{x-2}$

On a: $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-1 = 6-1 = 5$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-1 = 6-1 = 5$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x-1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} x-2 = 0^-$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-1 = 6-1 = 5$

Donc : $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$; $f'(x)=\left(\dfrac{3x-1}{x-2}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x-2)-(3x-1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)-1\times(3x-1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x-6-3x+1}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}$$

4) $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2} \prec 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$3 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$

5) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y = f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3

Est : $(T): y = f(3)+f'(3)(x-3)$

On a : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$

Donc : $f(3)=\dfrac{3\times3-1}{3-2}=\dfrac{9-1}{1}=8$

Et on a : $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$

Donc : $f'(3)=\dfrac{-5}{(3-2)^2}=\dfrac{-5}{1^2}=-5$

Donc : $(T): y = 8-5(x-3)$

Donc : $(T): y = 8-5x+15$

Donc : $(T): y = -5x+23$

6)Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\geq 3$?

La courbe (C_f) est au-dessus de la droite : $(D): y=3$ si $x \in]2;+\infty[$

Donc $S =]2;+\infty[$

Exercice4: 8points (1pt +2pt +1.5pt +1pt+ +1.5pt +1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2012 (Session Rattrapage)

Soient f la fonction définie sur R par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative

1) Calculer : $f(0)$ et $f(-3)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=(x+3)^2$

4) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1

Solution : 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7$

$f(0)=\frac{1}{3}\times0^3+3\times0^2+9\times0+7=7$

$f(-3)=\frac{1}{3}\times(-3)^3+3\times(-3)^2+9\times(-3)+7=\frac{-27}{3}+27-27+7=-9+7=-2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^3=-\infty$

3) Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=(x+3)^2$?

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7\right)'=\frac{1}{3}\times3x^{3-1}+3\times2x^{2-1}+9+0$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=x^2+6x+9=x^2+2\times x\times3+3^2=(x+3)^2$

4) Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(x+3)^2\geq0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=-3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3

Est : $(T): y=f(-3)+f'(-3)(x-(-3))$

On a : $f(-3)=-2$

Et on a : $f'(x)=(x+3)^2$

Donc : $f'(-3)=(-3+3)^2=0$

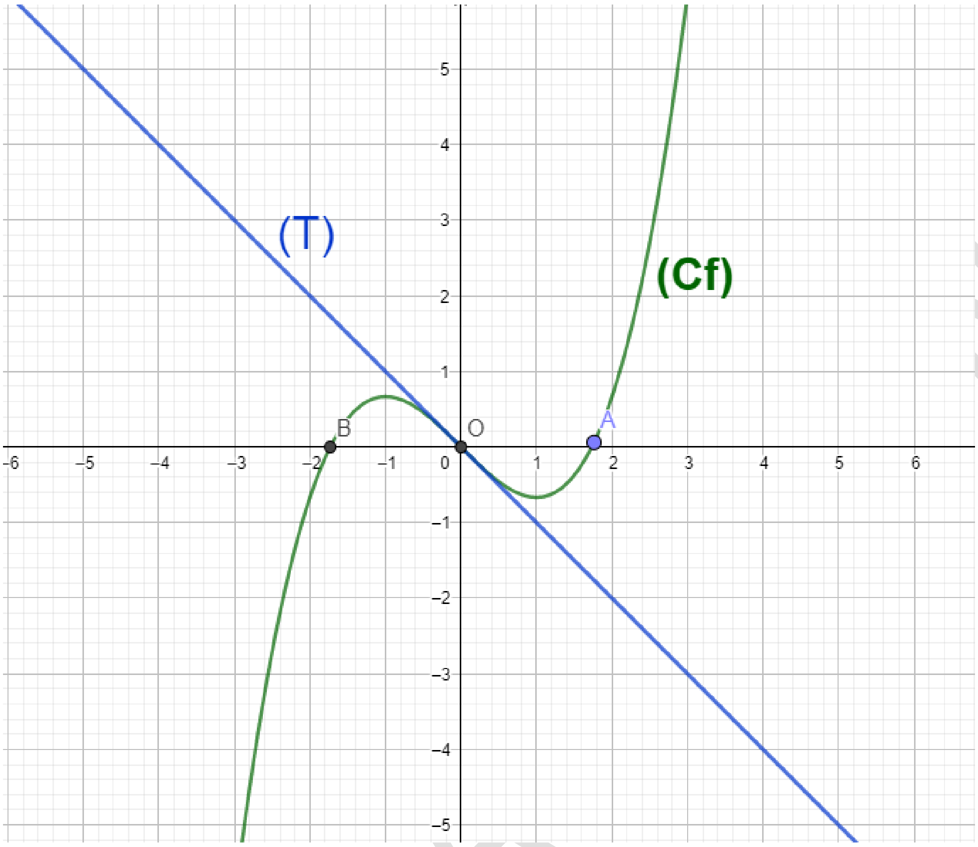
Donc : $(T): y=-2+0(x+3)$

Donc : $(T): y=-2$

Exercice5 : 8points (1pt +1pt +1.5pt +1pt+ +1pt +0.5pt +1pt +1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat)
2013(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

La courbe représentative (C_f) de f est donnée dans le repère ci-dessous :
(Voire figure)



1) Calculer : $f(0)$ et $f(1)$

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ L'équation : $f(x)=0$

4) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)=(x-1)(x+1)$

5) En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

6) Que représente la droite (T) pour la courbe représentative (C_f) de f ?

7) Déterminer l'équation de la droite (T)

8) Résoudre dans $\mathbb{R}$ L'inéquation : $f(x)\geq -x$

Solution : 1) Calcul de : $f(0)$ et $f(1)$

On a : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

Donc : $f(0)=\frac{1}{3}0^3-0=0-0=0$ et $f(1)=\frac{1}{3}1^3-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ L'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3-x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ \frac{1}{3}x^2-1=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ \frac{1}{3}x^2=1\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x^2=3\Leftrightarrow x=0\ \ ou\ \ x=\sqrt{3}\,ou\ \ x=-\sqrt{3}$

Donc : $S=\left\{-\sqrt{3};\,0;\sqrt{3}\right\}$

4) $\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)'=\frac{1}{3}3x^2-1=x^2-1=x^2-1^2=(x-1)(x+1)$

5) $\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)=(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x-1=0\ ou\ \ x+1=0\Leftrightarrow x=1\ \ ou\ \ x=-1$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=x^2-1\ \ a=1\succ 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[-1;1]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2/3$	$\searrow$	$-2/3$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$f(1)=\frac{1}{3}1^3-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

6) la droite (T) est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

7) Détermination de l'équation de (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T):y=f(0)+f'(0)(x-0)$

On a : $f(0)=0$ Et on a : $f'(x)=x^2-1$

Donc : $f'(0)=0^2-1=-1$

Donc : $(T):y=0-1(x-0)$

Donc : $(T):y=-x$

8) Résolution dans $\mathbb{R}$ L'inéquation : $f(x)\geq -x$

Résolution algébrique : $f(x)\geq -x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-x\geq -x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3\geq 0 \Leftrightarrow 3\times\frac{1}{3}x^3\geq 3\times 0 \Leftrightarrow x^3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $S=[0;+\infty[$

Résolution graphique : $f(x)\geq -x$

La courbe (C_f) est au-dessus de la tangente (T) si $x\in[0;+\infty[$

Donc : $S=[0;+\infty[$

Exercice6 : 9points (1pt +2pt +2pt +1pt+ +1pt +1pt+1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2014(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) Calculer : $f(0)$ et $f(-1)$

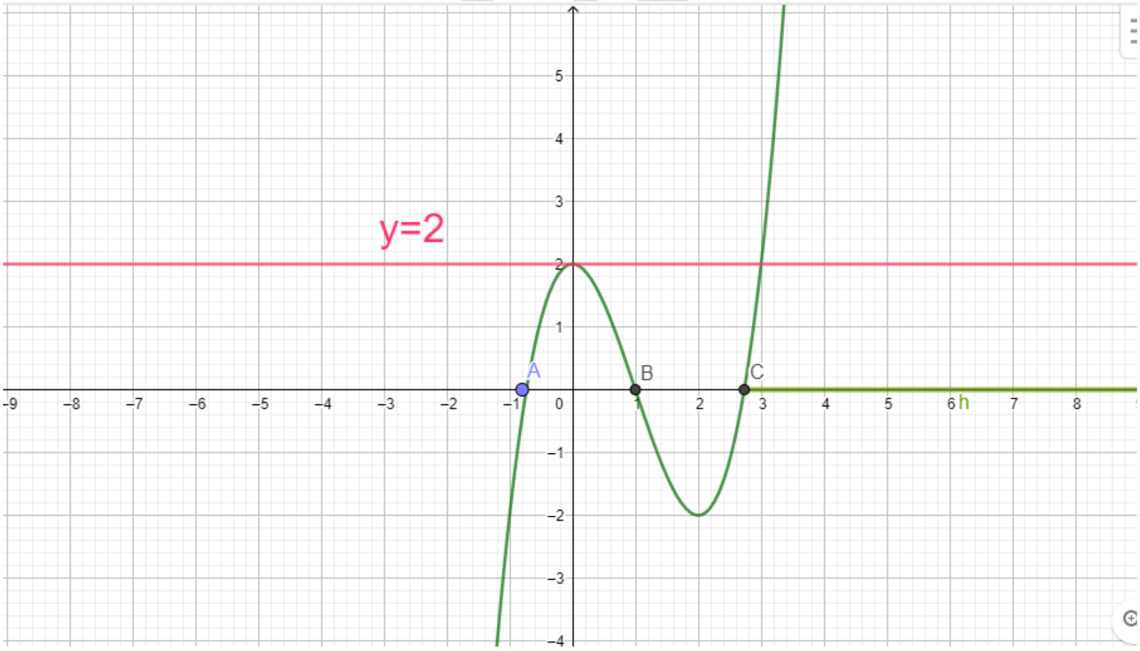
2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=3x(x-2)$

b) Etudier les variations de f sur $[0;2]$

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1

4) la courbe (C_f) ci-dessous la courbe de f



a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=0$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\succ 2$

Solution : 1) Calcul de : $f(0)$ et $f(-1)$

On a : $f(x)=x^3-3x^2+2$

Donc : $f(0)=0^3-3\times 0^2+2=0+2=2$

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+2=-1-3+2=-2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) a) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(x^3-3x^2+2\right)'=3x^2-3\times 2x+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x(x-2)$

$x\in[0;2]\Leftrightarrow 0\le x\le 2\Leftrightarrow 0\le 3x\le 6$ et $x-2\le 0$

Donc : $f'(x)=3x(x-2)\le 0$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $[0;2]$

c) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 ?
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=1$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1
Est : $(T):y=f(1)+f'(1)(x-1)$

On a : $f(1)=1^3-3\times 1^2+2=1-3+2=0$ Et on a : $f'(x)=3x(x-2)$

Donc : $f'(1)=3\times 1(1-2)=-3$

Donc : $(T):y=0-3(x-1)$

Donc : $(T):y=-3x+3$

4)a) Pour Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe de (C_f) et l'axe
Des abscisses.

Graphiquement l'équation : $f(x)=0$ admet 3 solutions car la courbe coupe (Ox) 3 fois

4)b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ 2$:

La courbe (C_f) est au-dessus de la droite : $(D):y=2$ si $x\succ 3$

Donc : graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x)\succ 2$ est : $S=]3;+\infty[$

Exercice7 : 8points (1pt +3pt +1.5pt +1pt+ 1.5pt) Région de Guelmim Oued Noun 2014 (Session Normale)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) a) Montrer que : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

2) a) Montrer que : $\forall x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

b) Donner le tableau de variations de f sur D_f

3) Montrer que : l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est : $(T): y=-3x+11$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1}$ On a: $\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=2+1=3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} x-1=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+1=3$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

2)a) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)-1\times(2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

b) $f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}\prec 0$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

3) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

Est : $(T): y = f(2) + f'(2)(x-2)$

On a : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Donc : $f(2) = \dfrac{2\times 2+1}{2-1} = \dfrac{5}{1} = 5$ Et on a : $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Donc : $f'(2) = \dfrac{-3}{(2-1)^2} = \dfrac{-3}{1^2} = -3$

Donc : $(T): y = 5 - 3(x-2)$

Donc : $(T): y = 5 - 3x + 6$

Donc : $(T): y = -3x + 11$

Exercice8 : 2points (1pt +1pt) Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2014 (Session Normale)

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2x-4}$

2) Calculer la dérivée de la fonction : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Solution : 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2x-4} = ?$ On a **:** $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-4 = 0^-$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2x-4$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2x-4} = -\infty$

2) Calcul de : $f'(x) = \left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1) - (2x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - 2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

Donc : $f'(x) = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Exercice9: 6points (1pt +1pt +0.75pt+0.75pt+1pt +1pt+0.5pt) Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2014 (Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x + 2$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 3$

b) Montrer que f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$
et Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

3) Calculer : $f\left(0\right)$ *et* $f\left(1\right)$ *et* $f\left(-1\right)$

4) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 0

b) Tracer la courbe (C_f).

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f\left(x\right)=0$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x+2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(x^3+3x+2\right)'=3x^2+3$

b) $\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)=3x^2+3\succ 0$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$

le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) $f\left(x\right)=x^3+3x+2$

$f\left(0\right)=0^3+3\times 0+2=0+0+2=2$

$f\left(1\right)=1^3+3\times 1+2=1+3+2=6$

$f\left(-1\right)=\left(-1\right)^3+3\times\left(-1\right)+2=-1-3+2=-2$

4) a) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $\left(T\right):y=f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right)$

On a : $a=0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $\left(T\right):y=f\left(0\right)+f'\left(0\right)\left(x-0\right)$

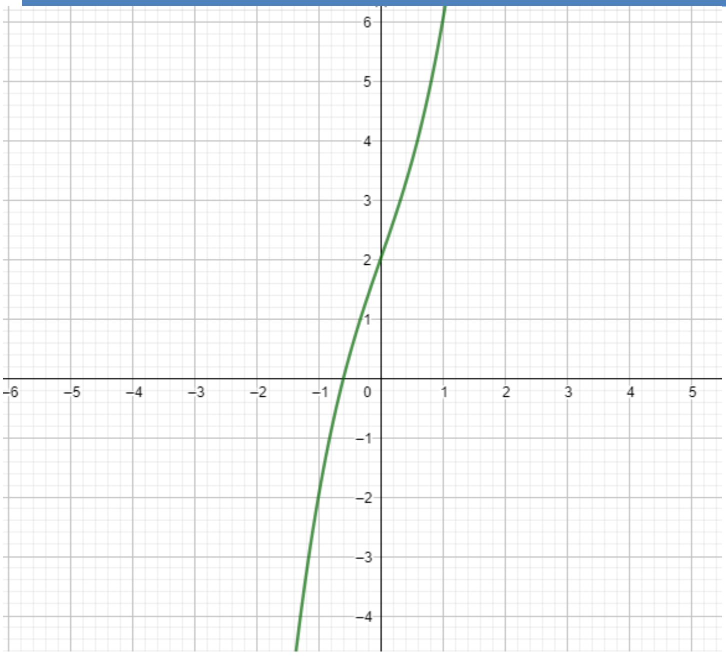
On a : $f\left(0\right)=0^3+3\times 0+2=0+0+2=2$

Et on a : $f'\left(x\right)=3x^2+3$

Donc : $f'\left(0\right)=3\times 0^2+3=3$

Donc : $\left(T\right):y=2+3\left(x-0\right)$ Donc : $\left(T\right):y=2+3x$

b) La courbe (C_f). :



c) Graphiquement l'équation : $f(x)=0$ admet une seule solution car la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point

Exercice10 : 8points (1pt +2pt +1pt+1pt+1.5pt +1.5pt) Région de chawia wardira 2014(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+1$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer : $f(0)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

4) a) calculer : $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ avec f' la fonction dérivée de f

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire que f est croissante sur D_f

5)Vérifier que : $f'(0)=0$ et montrer que : $y=1$ c'est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

6) Donner le tableau de variations de f sur D_f

7) Tracer la courbe (C_f) et la droite : $(D): y=1$ dans le même repère

Solution : 1) $f(x)=x^3+1$

On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3+1=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3+1=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) Calcul de : $f(0)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

On a : $f(x)=x^3+1$

Donc : $f(0)=0^3+1=0+1=1$ et $f(1)=1^3+1=1+1=2$ et $f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$

4) a) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=(x^3+1)'=3x^2+0=3x^2$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x^2\geq 0$

Donc : f est une fonction croissante dans $\mathbb{R}$

5) $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 3x^2$

Donc : $f'(0) = 3\times 0^2 = 3\times 0 = 0$

L’équation de la tangente à la courbe de f au point d’abscisse a

Est : $(D): y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a : $a = 0$ donc : L’équation de la tangente à la courbe de f au point d’abscisse 0

Est : $(D): y = f(0) + f'(0)(x-0)$

On a : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

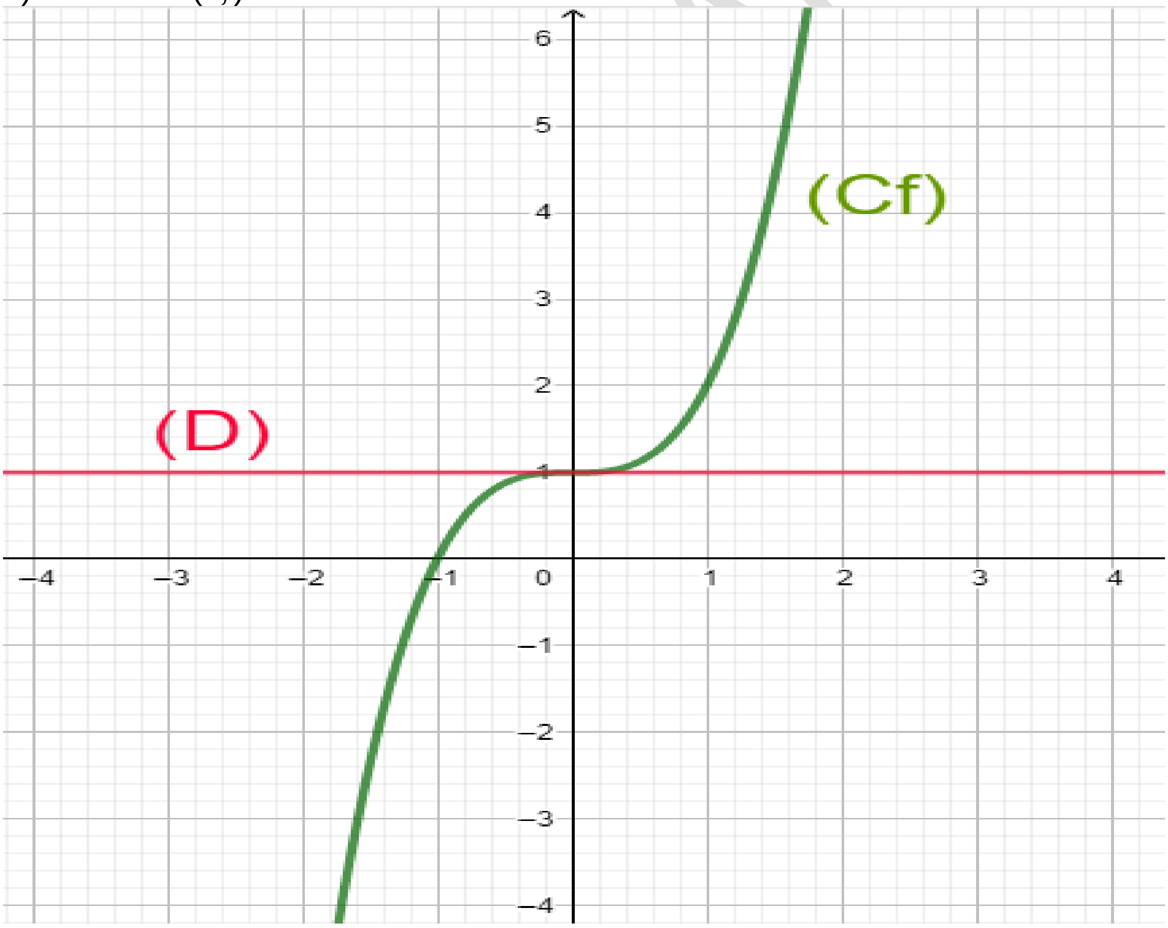
Donc : $(D): y = 1 + 0(x-0)$

Donc : $(D): y = 1$

6) le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

7) La courbe (C_f). :



Exercice11 : 4points (2pt +2pt) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune) 2015(Session Normale)

Soient les fonctions g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$g(x)=x^3+2x$ et $h(x)=\frac{x-2}{x-1}$

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ c) $\lim_{x\to1^+} h(x)$

2) Calculer : $g'(x)$ et $h'(x)$

Solution : 1) a) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3+2x=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

c) $\lim_{x\to1^+} h(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-2}{x-1}$ On a : $\lim_{x\to1^+} x-2=1-2=-1$ et $\lim_{x\to1^+} x-1=0^+$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim_{x\to1^+} h(x)=-\infty$

2) a) Calcul de : $g'(x)$

$g'(x)=\left(x^3+2x\right)'=3x^{3-1}+2$

$g'(x)=3x^2+2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) Calcul de : $h'(x)=\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$h'(x)=\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'=\frac{(x-2)'(x-1)-(x-2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)-1\times(x-2)}{(x-1)^2}$

$h'(x)=\frac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$

Donc : $h'(x)=\frac{1}{(x-1)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Exercice12 : 4points (1pt +0.5pt +0.75pt +1pt +0.75pt) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune) 2015(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2-4x-3$

1) Calculer : $f(0)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=4(2x-1)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f

3) Déterminer les points d'intersections de la courbe de f avec l'axe des abscisses

4) Tracer la courbe (C_f) de f

Solution : 1)On a : $f\left(x\right)=4x^{2}-4x-3$ donc :$f\left(0\right)=4\times0^{2}-4\times0-3=0-0-3=-3$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-4\times\left(\frac{1}{2}\right)-3=4\times\frac{1}{4}-\frac{4}{2}-3=1-2-3=-4$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}4x^{2}-4x-3=\lim_{x\to+\infty}4x^{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}4x^{2}-4x-3=\lim_{x\to-\infty}4x^{2}=+\infty$$

2)a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=\left(4x^{2}-4x-3\right)'=4\times2x-4+0=8x-4=4\left(2x-1\right)$

4) $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow4\left(2x-1\right)=0$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow2x-1=0$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Le tableau de signe est le suivant : $f'\left(x\right)=8x-4$ $\quad a=8\succ0$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$8x+4$	$-$	0	$+$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	-4	$\nearrow$ $+\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-4$

3) Déterminons les points d'intersections de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Sont les solutions de l'équation : $f\left(x\right)=0$

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow4x^{2}-4x-3=0$

Calculons le discriminant de l'équation $4x^{2}-4x-3=0$: a = 4, b= -4 et c = -3
Donc : $\Delta=b^{2}-4ac=(-4)^{2}-4\times4\times(-3)=16+48=64$
Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_{1}=\frac{4+\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{4+8}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_{2}=\frac{4-\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{4-8}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(\frac{-1}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{3}{2};0\right)$

4) La courbe (C_f). :

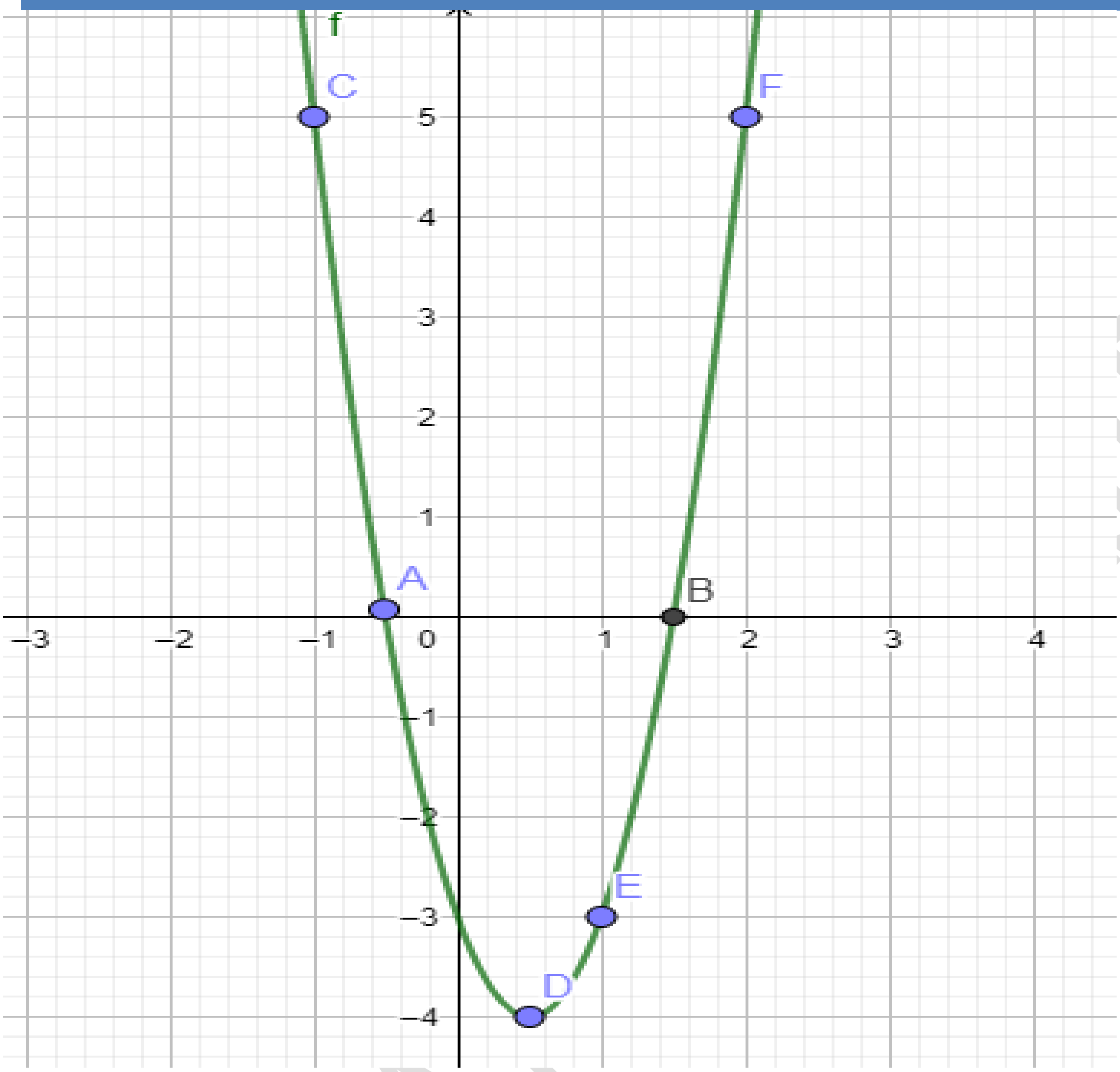
Pour construire la courbe représentative $\left(C_{f}\right)$ on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1/2	1	2
f(x)	5	-1	-4	-3	5

$f\left(-1\right)=4\times\left(-1\right)^{2}-4\times\left(-1\right)-3=4+4-3=5$

$f\left(2\right)=4\times2^{2}-4\times2-3=16-8-3=5$

$f\left(1\right)=4\times1^{2}-4\times1-3=4-4-3=-3$



Exercice13 : 4points (2pt +2pt) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune) (Session Rattrapage) 2015

Soient les fonctions g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$g(x)=5x^2-10x+1$ et $h(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$

2) Calculer : $g'(x)$ et $h'(x)$

Solution : 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-10x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-5}{x-2}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-5=4-5=-1$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2=0^-$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

2) a) Calcul de : $g'(x)$

$$g'(x) = \left(5x^2 - 10x + 1\right)' = 2 \times 5x^{2-1} - 10 + 0$$

$$g'(x) = 10x - 10 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Calcul de : $h'(x) = \left(\dfrac{2x-5}{x-2}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$h'(x) = \left(\frac{2x-5}{x-2}\right)' = \frac{(2x-5)'(x-2) - (2x-5)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2) - 1 \times (2x-5)}{(x-2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x - 4 - 2x + 5}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Donc : $h'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

Exercice14 : 4points (0.75pt +1.5pt+0.5pt+0.75pt+0.5pt) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune) (Session Rattrapage) 2015

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 + 5x - 3$

1) Calculer : $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) a) Calculer : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)$ avec f' la fonction dérivée de f

b) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

3) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = (2x-1)(2x^2 + x + 3)$

b) Etudie l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$

Solution : 1) On a : $f(x) = 4x^3 + 5x - 3$

Donc : $f(0) = 4 \times 0^3 + 5 \times 0 - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4x^3 + 5x - 3 = \lim_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 + 5x - 3 = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(4x^3 + 5x - 3\right)' = 4 \times 3x^2 + 5 - 0 = 12x^2 + 5$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 12x^2 + 5 \succ 0$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) a) Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = (2x-1)(2x^2+x+3)$

$(2x-1)(2x^2+x+3) = 2x\times 2x^2 + 2x\times x + 2x\times 3 - 2x^2 - x - 3$

$(2x-1)(2x^2+x+3) = 4x^3 + 2x^2 + 6x - 2x^2 - x - 3$

$(2x-1)(2x^2+x+3) = 4x^3 + 5x - 3$

$(2x-1)(2x^2+x+3) = f(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = (2x-1)(2x^2+x+3)$

b) Etudions l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses :
Les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Sont les solutions de l'équation : $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x^2+x+3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x-1 = 0 \;\; ou \;\; 2x^2+x+3 = 0$

$2x-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$2x^2+x+3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 2\times 3 = 1-24 = -23 \prec 0$

Donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

La courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point : $A\left(\frac{1}{2};0\right)$

4) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$?

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a : $a = \frac{1}{2}$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

Est : $(T): y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

On a : $f(x) = 4x^3 + 5x - 3$

Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 4\frac{1}{8} + 5\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{6}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$

Et on a : $f'(x) = 12x^2 + 5$

Donc : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = \frac{12}{4} + 5 = 3 + 5 = 8$

Donc : $(T): y = 0 + 8\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Donc : $(T): y = 8x + 4$

Exercice15 : 6.5points (2pt +1.5pt+1pt+1pt+1pt) Région de Béni Mellal Khénifra 2015 (Session Normale)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$

1) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$

2) Calculer : $f'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^2-8x+2$

1) Calculer : $g(0)$ et $g(2)$

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

3) Calculer : $g'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

4) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Solution : I) 1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$

b) $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

2) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

II) 1) $g(x)=2x^2-8x+2$ donc : $g(0)=2\times0^2-8\times0+2=2$

$g(2)=2\times2^2-8\times2+2=8-16+2=-6$

2) Calcul de : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^2-8x+2=\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x^2-8x+2=\lim_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)=2x^2-8x+2$ Donc : $g'(x)=\left(2x^2-8x+2\right)'=2\times2x-8+0=4x-8$

Donc : $g'(x)=4x-8$ $\forall x\in\mathbb{R}$

4) Le tableau de variation de g : $g'(x)=0\Leftrightarrow 4x-8=0$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2$ $g'(x)=4x-8$ $a=4\succ0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$

Exercice16 : 6points (0.5pt +2pt+1.5pt +.05pt+1.5pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2015 (Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{2x+2}{x}$

1) Calculer : D_f le domaine de définition de f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

3) a) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{-2}{x^2}$ et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses

c) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}$

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}^*$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+2}{x}$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+2=0+2=2$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+2}{x}$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+2=0+2=2$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

3) a) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $f'(x)=\left(\dfrac{2x+2}{x}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+2}{x}\right)'=\frac{(2x+2)'\times x-(2x+2)\times x'}{x^2}=\frac{2x-1\times(2x+2)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2x-2}{x^2}=\frac{-2}{x^2}\prec 0$$

b) les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses

Sont les solutions de l'équation : $f(x)=0$

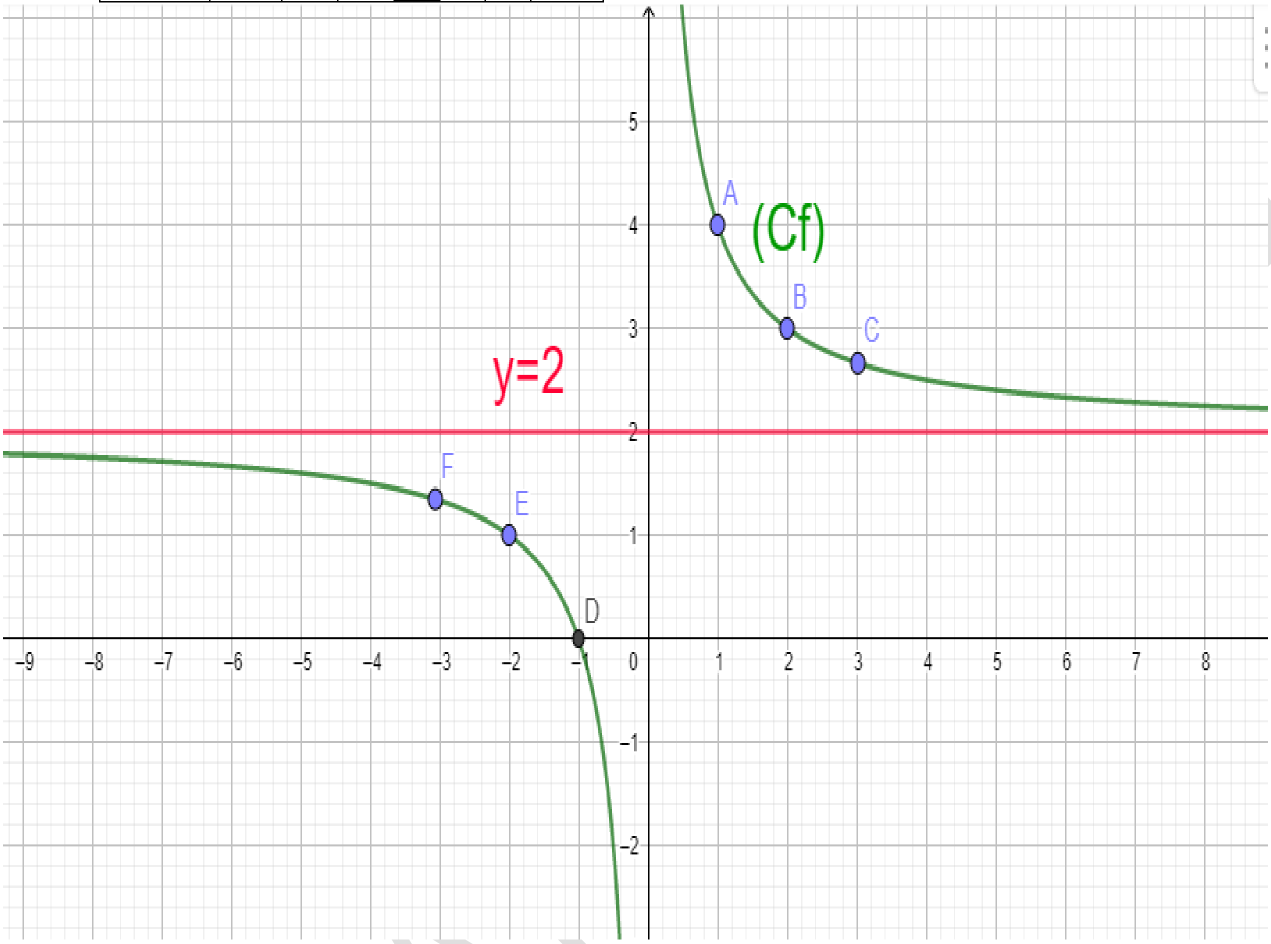
$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x+2}{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=-2$$
$$\Leftrightarrow x=-1$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses est : $x=-1$

c) la courbe (C_f).

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-3	-2	-1	[redacted]	1	2	3
$f(x)$	$4/3$	1	0	[redacted]	4	3	$8/3$



Exercice17 : 3points (1pt +1pt+1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2015 (Session Normale)

Le tableau suivant représente les variations d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	4	↘ 0	↘ $-\infty$

En utilisant ce tableau répond aux questions suivantes :

1) Déterminer les solutions de l'équation : $f(x)=0$

2) Déterminer le signe de $g(x)$

3) Déterminer les solutions de l'inéquation : $f(x)\succ 4$

Solution : Le tableau suivant représente les variations d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	4	↘ 0	↘ $-\infty$

1) Les solutions de l'équation : $f(x)=0$ sont : x=-2 et x=3

2) Détermination du signe de $g(x)$: $g(x)\geq 0 \ si \ x\in[-2;3]$

$g(x)\leq 0 \ si \ x\in]-\infty;-2]\cup[3;+\infty[$

3) L'inéquation : $f(x)\succ 4$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$

Exercice18 : 3points (2pt +1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat)2015 (Session Rattrapage)

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{3x-1}{x-2}$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

2) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$; $g'(x)$ avec g' la fonction dérivée de g

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-1}{x-2}$$

On a: $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=2-2=0$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-1=5$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-1=5$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=+\infty$

4) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$; $g'(x)=\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$g'(x)=\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x-2)-(3x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{3(x-2)-1\times(3x-1)}{(x-2)^2}$$

$$g'(x)=\frac{3x-6-3x+1}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}$$

Exercice19: 5points (1pt +1pt+1pt +2pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2015 (Session Rattrapage)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-12x$

1) Calculer : $f(0)$ et $f(2)$

2) Montrer que f est une fonction impaire

3) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=3(x-2)(x+2)$

4) Montrer que : f est croissante dans $]-\infty;2]$ et sur $[2;+\infty[$

Et f est une fonction décroissante dans $[-2;2]$

Solution : 1) Calcul de : $f(0)$ *et* $f(2)$

On a : $f(x)=x^3-12x$

Donc : $f(0)=0^3-12\times0=0-0=0$

$f(2)=2^3-12\times2=8-24=-16$

2) Montrons que f est une fonction impaire : $f(x)=x^3-12x$

f est une fonction polynôme : Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=(-x)^3-12\times(-x)=-x^3+12x=-(x^3-12x)$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=3(x-2)(x+2)$?

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(x^3-12x)'=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x^2-2^2)=3(x-2)(x+2)$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=3(x-2)(x+2)=3(x-2)(x+2)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x-2=0$ *ou* $x+2=0\Leftrightarrow x=2$ *ou* $x=-2$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=3x^2-12$ $a=3\succ0$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;-2]$ et sur $[2;+\infty[$

Exercice20 : 8points (2pt +1pt +0.75pt+1pt +0.75pt +2.5pt) Région de Marrakech Safi 2015 (Session Normale)

A) Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;-\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)$

2) Calculer : $f'(x)$; $\forall x\in]-\infty;1[\cup]1;-\infty[$

B) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^2-4x$

1) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$ et $g(2)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

3) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $g'(x)=4(x-1)$

4) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) représenter les points d'abscisse 0 ; 1 ; 2 et Tracer la courbe (C_g)

Solution : A) 1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$

On a : $\lim_{x\to 1^+} x = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

2) Calculer : $\forall x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$; $f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{(x)'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{1(x-1)-x\times1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

B) 1) $g(x) = 2x^2-4x$ $\quad g(0) = 2\times0^2-4\times0 \quad g(1) = 2\times1^2-4\times1 = 2-4 = -2$

$g(2) = 2\times2^2-4\times2 = 8-8 = 0$

2) Calcul de : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2-4x = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2-4x = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 2x^2-4x$

Donc : $g'(x) = (2x^2-4x)' = 2\times2x-4 = 4x-4$

Donc : $g'(x) = 4(x-1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

4) Le tableau de variation de g :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x-1) = 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Le tableau de signe est le suivant : $g'(x) = 4x-4 \qquad a = 4 \succ 0$

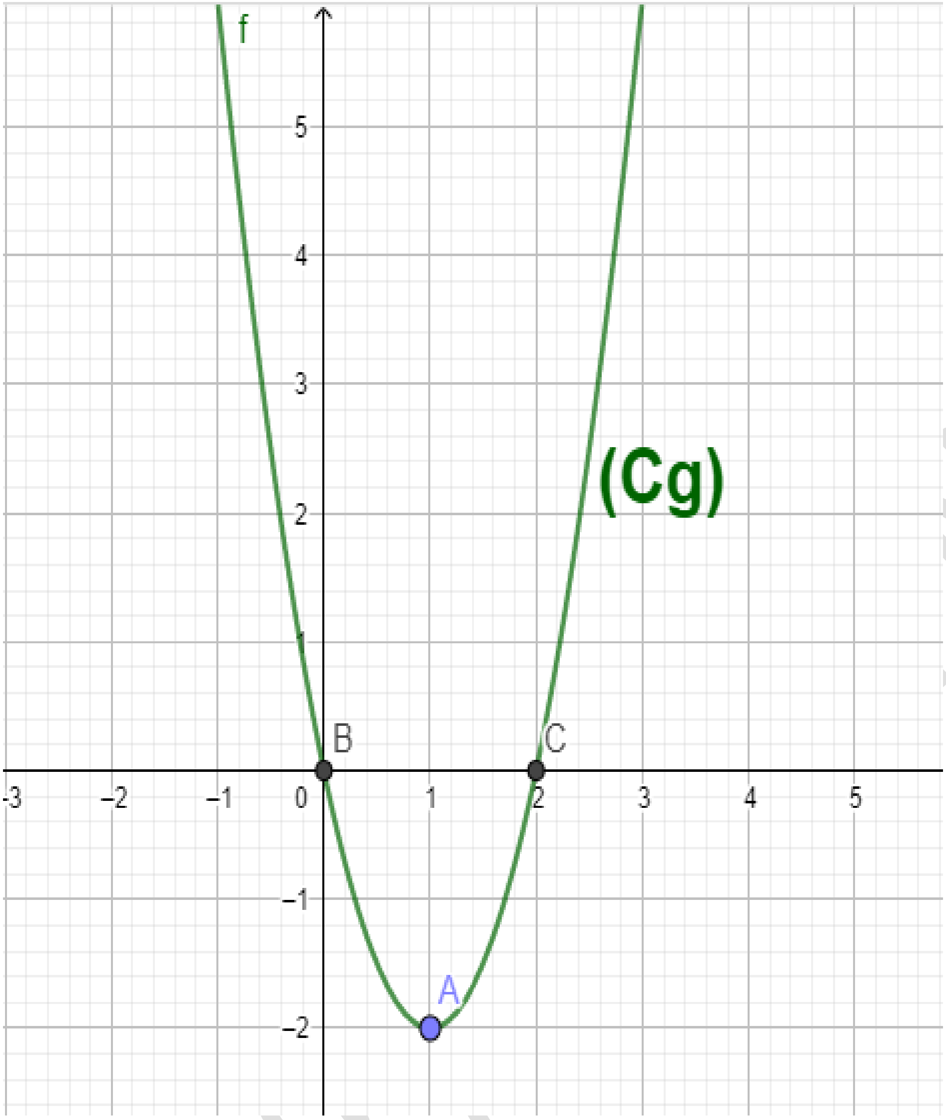
x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$4x-4$	$-$ 0 $+$

Le tableau de variation de g est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0 $\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

5) 5) représentation des points d'abscisse 0 ; 1 ; 2 et Traçage de la courbe (C_g)

$g(0)=0$ et $g(1)=-2$ et $g(2)=0$



Exercice21 : 6points (1pt +1pt+0.5pt +1.5pt +0.5pt+1.5pt) 2016(Session Normale)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$ et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

5) a) En déduire les variations de f sur D_f

b) Donner le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq 0\}$

$x-3=0\Leftrightarrow x=3$

$D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+2}{x-3}$

On a: $\lim\limits_{x\to 3^+} x+2=3+2=5$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$x-3$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x+2=3+2=5$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+2}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} x+2=3+2=5$ Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

La droite (Δ_1): $x=3$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

La droite (Δ_2): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$; $f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)'=\frac{(x+2)'(x-3)-(x+2)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{1(x-3)-1\times(x+2)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-3-x-2}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}\prec 0$$

5) a) $f'(x)=\frac{-5}{(x-3)^2}\prec 0$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;3[$ et sur $]3;+\infty[$

b)Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$ 3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$

Exercice22: 8points (1.5pt +1.5pt+1pt+1.5pt +1.5pt +1pt)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{10}{x}$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)$

2) Calculer : $f'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^2-8x+2$

1) Calculer : $g(0)$ et $g(2)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

3) Calculer : $g'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

4) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Solution : I) 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

2) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

II) 1) $g(x)=2x^2-8x+2$

$g(0)=2\times0^2-8\times0+2=2$

$g(2)=2\times2^2-8\times2+2=8-16+2=-6$

2) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-8x+2=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-8x+2=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)=2x^2-8x+2$

Donc : $g'(x)=(2x^2-8x+2)'=2\times2x-8+0=4x-8$

Donc : $g'(x)=4x-8$ $\forall x\in\mathbb{R}$

4) Le tableau de variation de g : $g'(x)=0\Leftrightarrow 4x-8=0$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2$ $\quad g'(x)=4x-8$ $\quad a=4\succ0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	-6	$\nearrow$	

Exercice 23: 8points (1.5pt +1.5pt+1pt+1pt 1.5pt +1.5pt) Région de Marrakech Safi 2017(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x-2$

1) Calculer : $f(0)$ et $f(1)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

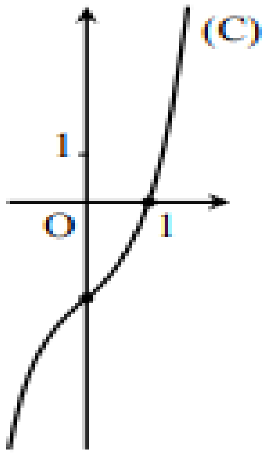
3) a) Calculer : $f'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

b) Montrer que f est strictement croissante dans $\mathbb{R}$

c) Donner le tableau de variations de f sur D_f

4)La courbe représentatives (C_f) de f est donnée dans le repère ci-dessous :

(Voire figure)



Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq 0$

Solution : 1) $f(x)=x^3+x-2$

$f(0)=0^3+0-2=0+0-2=-2$

$f(1)=1^3+1-2=1+1-2=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) a) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(x^3+x-2\right)'=3x^2+1-0=3x^2+1$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x^2+1\succ 0$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$

c) le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) $f(x)\geq 0$ signifie Graphiquement que La courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses

$f(x)\geq 0$ si $x\in[1;+\infty[$

Donc $S=[1;+\infty[$

Exercice24 :8points (0.75pt +2pt+1.5pt+1pt +0.75pt+1.5pt+0.5pt)
Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2017(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

1) Calculer : $f(0)$ et $f(-1)et$ $f(2)$

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$; $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}$

4) Donner le tableau de variations de f sur D_f

5) a) Montrer que l'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(0;-1)$ est : $(T):y=-2x-1$

b) Représenter La courbe représentatives (C_f) et la droite (T) dans un même repère :

c)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq 3$

Solution : 1) Calcul de : $f(0)$ et $f(-1)et$ $f(2)$

$f(0)=\frac{0+1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$ et $f(-1)=\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{0}{-2}=0$ et $f(2)=\frac{2+1}{2-1}=\frac{3}{1}=3$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}$

On a **:** $\lim_{x\to 1^+} x+1=1+1=2$ et $\lim_{x\to 1^+} x-1=0$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

$\lim_{x\to 1^+} x-1=0^+$ et $\lim_{x\to 1^+} x+1=2$

Donc : $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^-} x-1=0^-$ et $\lim_{x\to 1^-} x+1=2$

Donc **:** $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

3) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)-1\times(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

4) $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}\prec 0$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$12 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

5) a) L'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(0;-1)$

Est : $(T): y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a : $a = 0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T): y = f(0) + f'(0)(x-0)$ avec $f(0) = -1$

Et on a : $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ donc : $f'(0) = \dfrac{-2}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1^2} = -2$

Donc : $(T): y = -1 - 2(x-0)$

Donc : $(T): y = -1 - 2x$

Donc : $(T): y = -2x - 1$

5)b) Représentation de La courbe représentatives (C_f) et la droite (T) dans un même repère :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1	2	3	
f(x)	0	-1		3	2	

$f(2) = 3$ et $f(-1) = 0$ et $f(0) = -1$ et $f(3) = 2$

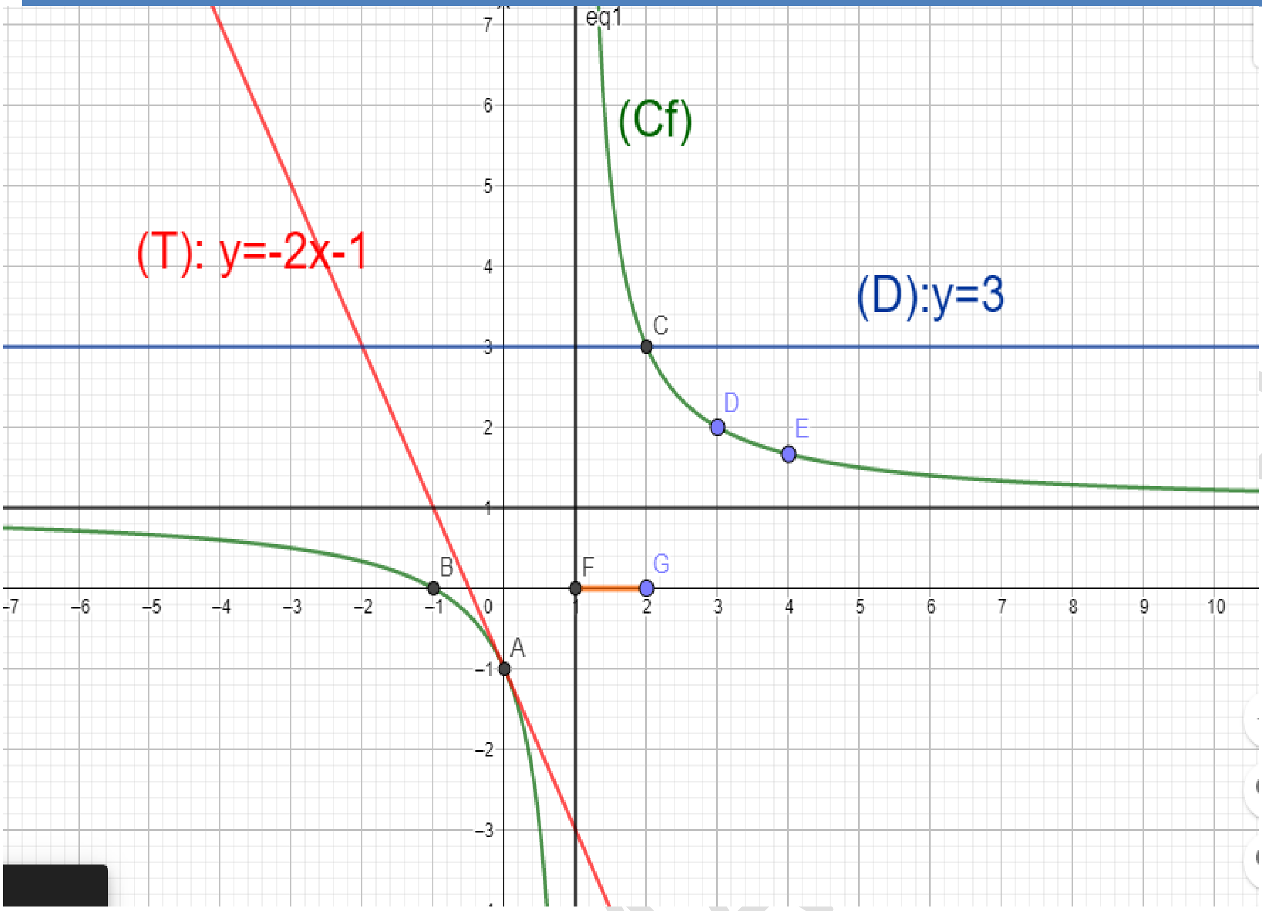
Pour construire la droite (T) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

(Deux points suffisent) $(T): y = -2x - 1$

Si x=0 alors : $y = -2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

Si x=1 alors : $y = -2 \times 1 - 1 = -2 - 1 = -3$

x	0	1
y	-1	-3



c)La Résolution graphique de l'inéquation : $f(x) \geq 3$

La courbe (C_f) est au-dessus de la droite : $(D): y = 3$ si $x \in]1;2]$

Donc $S =]1;2]$

Exercice 25 : 8points (0.75pt +2pt+1.5pt+1pt +0.75pt +1.5pt+0.5pt) Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2017 (Session Rattrapage)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$

1) Calculer : $f(0)$ et $f(3) et$ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

3)a) Vérifier que : $\forall x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$

b) Donner le tableau de variations de f sur $\forall x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

4) a) Montrer que l'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(3;5)$ est : $(T): y = -3x + 14$

b) Représenter La courbe représentatives (C_f) et la droite (T) dans un même repère :

c)Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{2x-1}{x-2} \geq 5$

Solution : 1) Calcul de : $f(0)$ et $f(3) et$ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$f(0)=\frac{2\times 0-1}{0-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ et $f(3)=\frac{2\times 3-1}{3-2}=\frac{5}{1}=5$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-2}=\frac{1-1}{\frac{-3}{2}}=\frac{0}{\frac{-3}{2}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{x-2}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=4-1=3$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=0$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$x-2$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

b)) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x-1}{x-2}$

On a: $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-1=4-1=3$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

3)a) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)'=\frac{(2x-1)'(x-2)-(2x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)-1\times(2x-1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

b) $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}\prec 0$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$

4) a) L'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(3;5)$

Est : $(T): y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T): y=f(3)+f'(3)(x-3)$ avec $f(3)=5$

Et on a : $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ donc : $f'(3)=\frac{-3}{(3-2)^2}=\frac{-3}{1^2}=-3$

Donc : $(T): y=5-3(x-3)$

Donc : $(T): y=5-3x+9$

Donc : $(T): y=-3x+14$

4)b) Représentation de La courbe représentatives (C_f) et la droite (T) dans un même repère :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	0	1/2	1	2	3	4	
f(x)	1/2	0	-1		5	7/2	

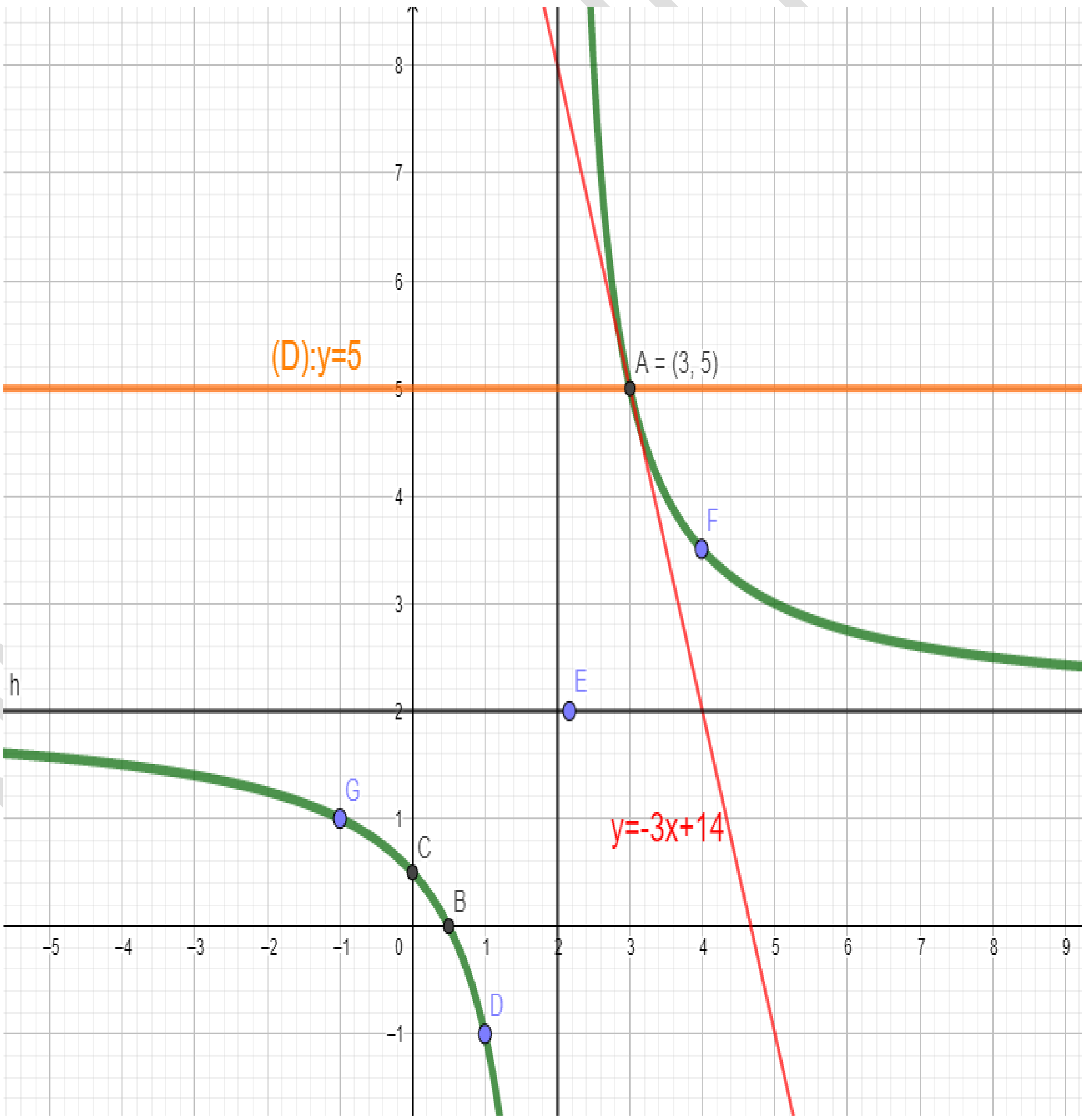
Pour construire la droite (T) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

(Deux points suffisent) $(T): y=-3x+14$

Si x=3 alors : $y=-3\times3+14=-9+14=5$

Si x=2 alors : $y=-3\times2+14=-6+14=8$

x	2	3
y	8	5



c)Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{2x-1}{x-2} \geq 5$

$\frac{2x-1}{x-2} \geq 5 \Leftrightarrow f(x) \geq 5$

La courbe (C_f) est au-dessus de la droite : $(D): y = 5$ si $x \in]2;3]$

Donc $S =]2;3]$

Exercice 26 : 7points (0.5pt +1pt+1.5pt+1.5pt+1pt+1.5pt) Région CASABLANCA – SETTAT 2017 (SESSION NORMALE)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

1) Déterminer le domaine de définition de f : D_f

2) Calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 4(x-2)$

4) Donner le tableau de variations de f

5) Calculer : $f(1)$ *et* $f(3)$

6) Tracer la courbe (C_f) de f

Solution : 1) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 - 8x + 6 = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 - 8x + 6 = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (2x^2 - 8x + 6)' = 2 \times 2x - 8 + 0 = 4x - 8 = 4(x-2)$

4) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Le tableau de signe est le suivant : $f'(x) = 4x - 8$ $a = 4 \succ 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$4x-8$	$-$	0	$+$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 6 = 8 - 16 + 6 = -2$

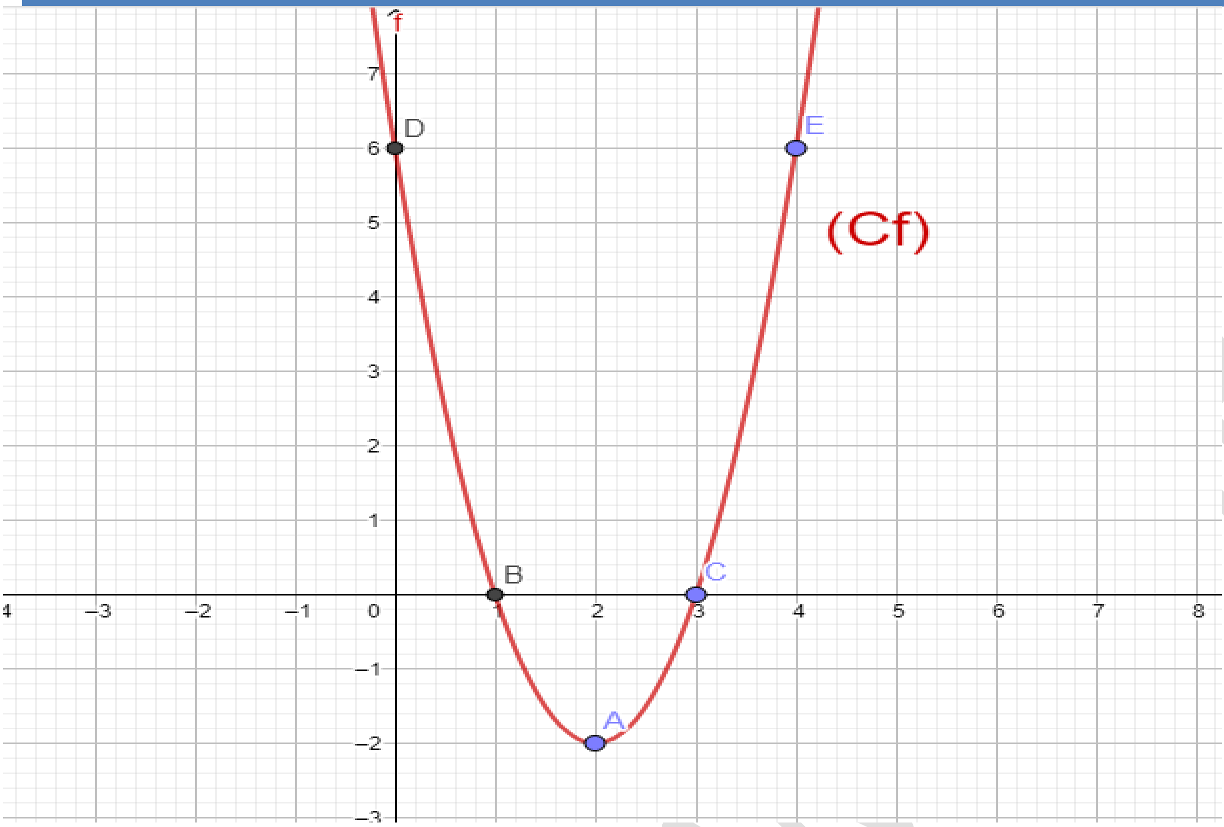
5) $f(1) = 2 \times 1^2 - 8 \times 1 + 6 = 2 - 8 + 6 = 0$

$f(3) = 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + 6 = 18 - 24 + 6 = 0$

6) La courbe (C_f). :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	0	1	2	3	4
f(x)	6	0	-2	0	6



Exercice 27 : 1points (0.5pt +0.5pt) Région CASABLANCA – SETTAT 2017 (SESSION NORMALE)

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3-1}$ 2) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x}$

Solution : 1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\times x}{x\times x\times x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x}$

On a : $\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{x\to 0} x^2 - x = 0-0=0$

Donc Formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\times 1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Exercice 28 : 8points (2.5pt +1.5pt+1pt+1pt+1pt+1pt) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune)2017(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2+8x+3$

1) Calculer : $f(0)$ *et* $f(-2)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x) = 8(x+1)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ et donner le tableau de variations de f

3) Montrer que L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(D): y = 8x + 3$

4) Montrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points à déterminer
5) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) $f(x) = 4x^2 + 8x + 3$

$f(0) = 4\times 0^2 + 8\times 0 + 3 = 3$

$f(-2) = 4\times(-2)^2 + 8\times(-2) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 + 8x + 3 = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 + 8x + 3 = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$

2)a) $\forall x \in \mathbb{R}\; f'(x) = \left(4x^2 + 8x + 3\right)' = 4\times 2x + 8 + 0 = 8x + 8 = 8(x+1)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8(x+1) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Le tableau de signe est le suivant : $f'(x) = 8x + 8 \qquad a = 8 \succ 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$8x+8$		$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = 4\times(-1)^2 + 8\times(-1) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

3)L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(D): y = f(a) + f'(a)(x - a)$

On a : $a = 0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(D): y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

On a : $f(0) = 3$ et $f'(x) = 8(x+1)$ donc : $f'(0) = 8(0+1) = 8$

Donc : $(D): y = 3 + 8(x - 0)$

Donc : $(D): y = 8x + 3$

4) les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Sont les solutions de l'équation : $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 3 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $4x^2 + 8x + 3 = 0$: a = 4, b= 8 et c = 3
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64-48.=16$
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1 = \frac{-8+\sqrt{16}}{2\times 4} = \frac{-8+4}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$ et $x_1 = \frac{-8-\sqrt{16}}{2\times 4} = \frac{-8-4}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$

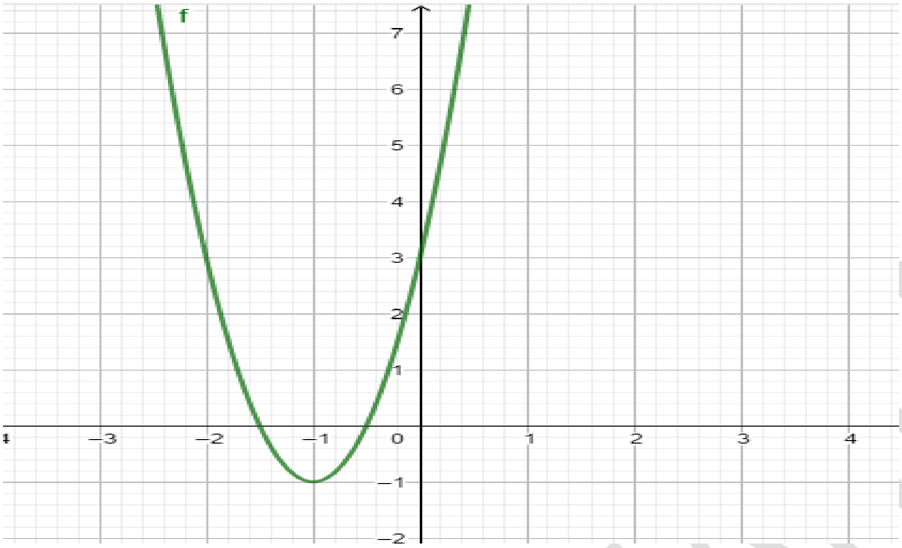
Donc : les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(\frac{-1}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{-3}{2};0\right)$

7) La courbe (C_f). :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	
f(x)	15	3	-1	3	15	



Exercice29 :9points (0.75pt +1pt+1.5pt+1.5pt +0.75pt+0.5pt+1pt+2pt) 2018 (Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1) Calculer : $f(0)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

2) Calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

5) Donner le tableau de variations de f

6) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

7) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses

8) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(0) = 0^3 - 3\times 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$

$f(1) = 1^3 - 3\times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

$f(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3 + 0 = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1^2) = 3(x-1)(x+1)$

4) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0\, ou \;\; x+1=0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 ou \;\; x=-1$

Le tableau de signe est le suivant : $f'(x)=3x^2-3 \qquad a=3\succ 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5)Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6) Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(x-1)^2(x+2)$

$(x-1)^2(x+2)=(x^2-2x+1)(x+2)$

$$=x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2$$

$$=x^3-3x+2$$

$$=f(x)$$

Donc : $(x-1)^2(x+2)=f(x)$

7) les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses Sont les solutions de l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \;\; ou \;\; x+2=0$$

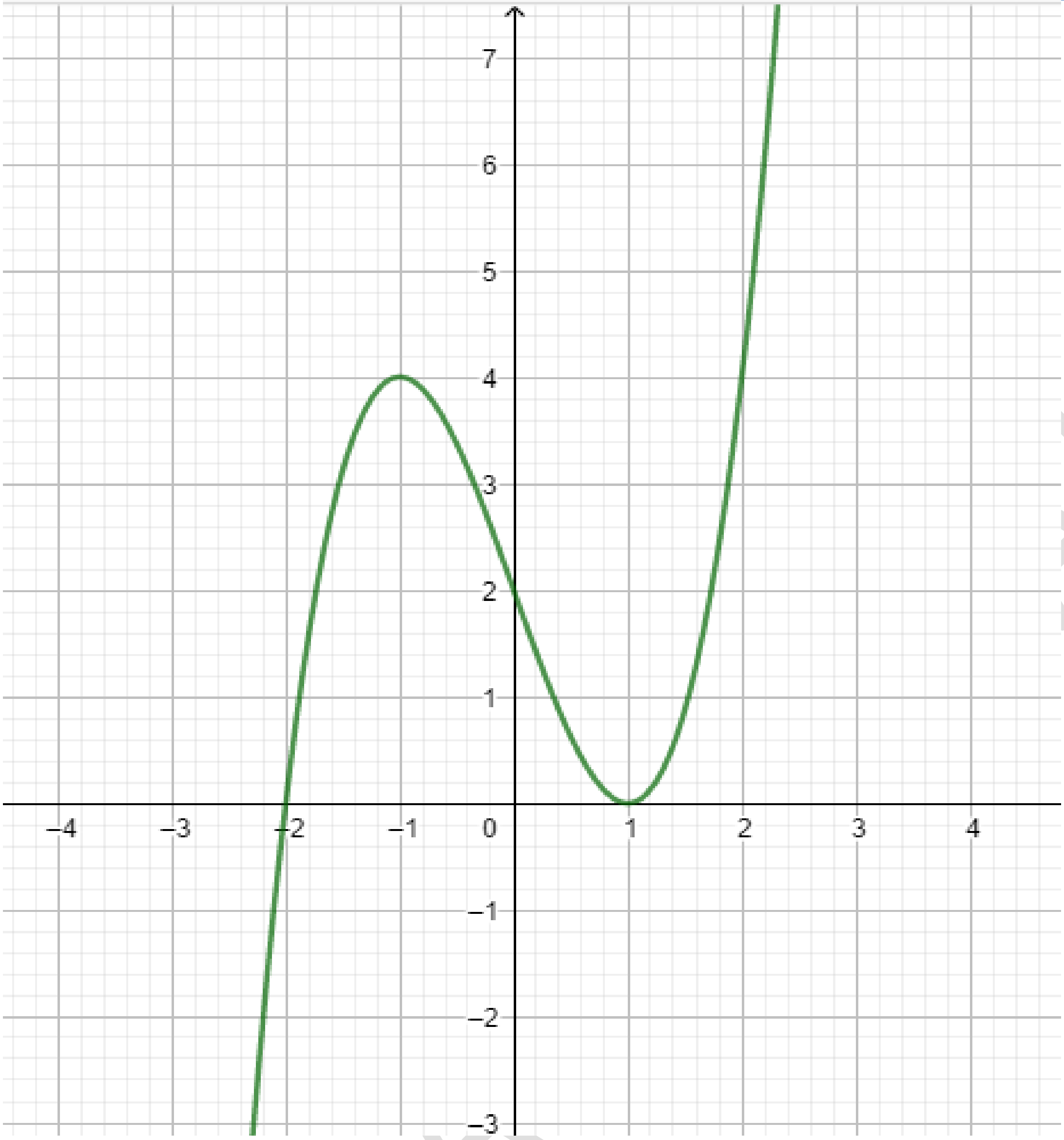
$$\Leftrightarrow x-1=0 \;\; ou \;\; x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \;\; ou \;\; x=-2$$

les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses sont : $x=1 \; et \;\; x=-2$

7) La courbe (C_f) : Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	
f(x)	0	4	2	0	4	



Exercice30 : 8points (1.5pt +1.5pt +1.5pt+0.75pt+1pt +0.5pt+1pt+1pt)
Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune)2018(Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-3x+1$

1) a) Calculer : $f(0)$ et $f(1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=3(2x-1)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

c) Donner le tableau de variations de f

3) Montrer que L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=1$

Est : $(D): y=3x-2$

4) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) a) $f(x)=3x^2-3x+1$

$f(0)=3\times 0^2-3\times 0+1=1$

$f(1)=3\times1^2-3\times1+1=3-3+1=1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{4}{4}=\frac{3}{4}-\frac{6}{4}+\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-3x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$

2)a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(3x^2-3x+1\right)'=3\times2x-3+0=6x-3=3(2x-1)$

b) $f'(x)=0\Leftrightarrow 3(2x-1)=0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Le tableau de signe est le suivant : $f'(x)=6x-3$ $\quad a=6\succ0$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$6x-3$		$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

3)L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0

Est : $(D): y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

On a : $x_0=1$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=1$

Est : $(D): y=f(1)+f'(1)(x-1)$

On a : $f(1)=1$ et $f'(x)=3(2x-1)$ donc : $f'(1)=3(2\times1-1)=3$

Donc : $(D): y=1+3(x-1)$

Donc : $(D): y=1+3x-3$

Donc : $(D): y=3x-2$

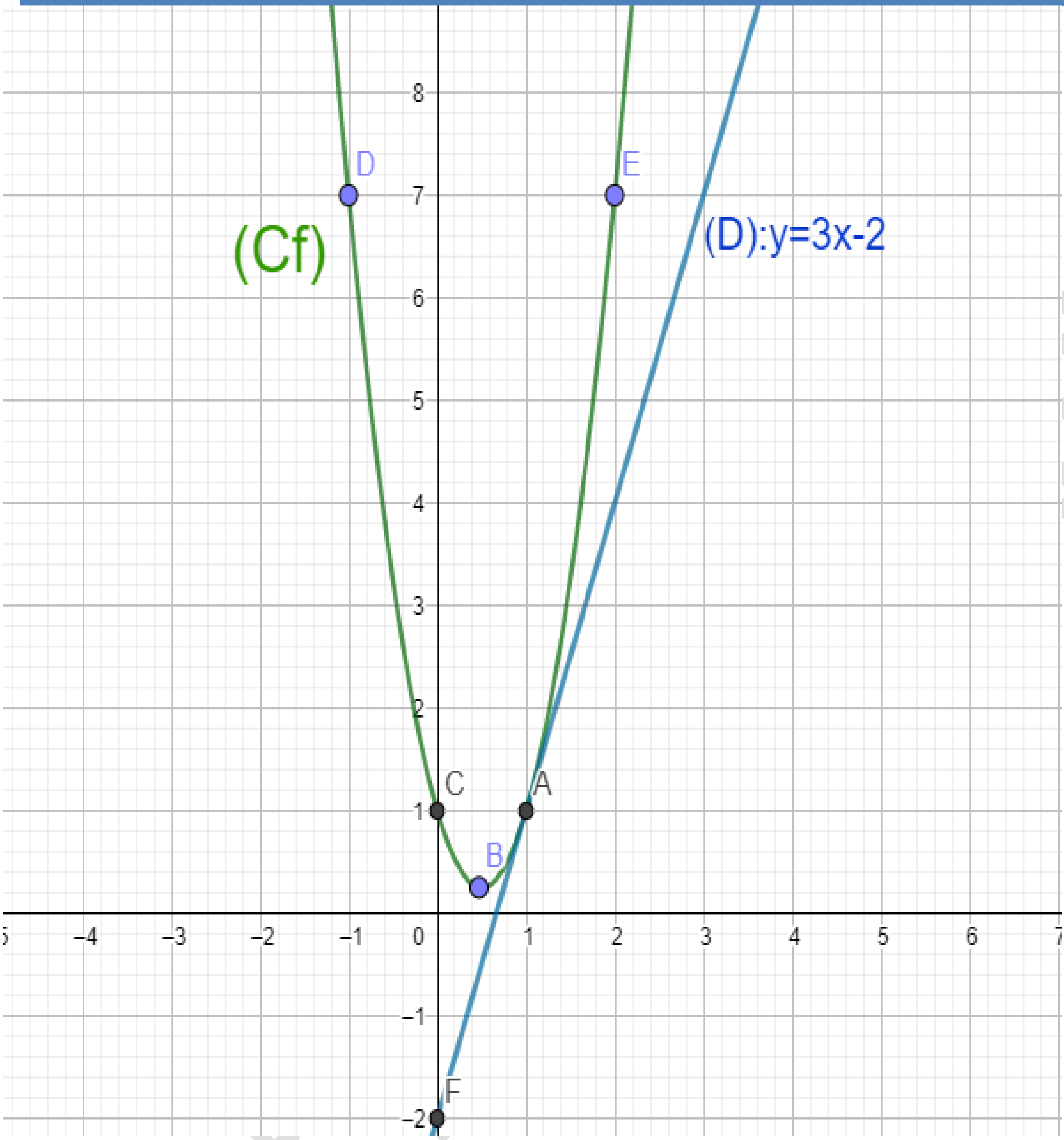
4) La courbe (C_f). :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1/2	1	2	
f(x)	7	1	1/4	1	7	

$f(2)=3\times2^2-3\times2+1=12-6+1=7$

$f(-1)=3\times(-1)^2-3\times(-1)+1=3+3+1=7$



Exercice31: 8points (0.75pt +2pt +1.5pt+1pt+0.75pt +1pt+1pt) Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2018(Session Normale)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2-2x+2$

1) Calculer : $f(0)$ *et* $f(1)$ *et* $f(2)$

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3)a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=2(x-1)$

b) Etudier le signe de $x-1$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

4) Montrer que : l'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(0;2)$ est :

$(D): y=-2x+2$

5) Tracer la courbe représentative (C_f) et la droite (D) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\le 2$

Solutions : 1) Calcul de : $f\left(0\right)$ *et* $f\left(1\right)$ *et* $f\left(2\right)$

On a : $f\left(x\right)=x^{2}-2x+2$

Donc : $f\left(0\right)=0^{2}-2\times0+2=0-0+2=2$

$f\left(1\right)=1^{2}-2\times1+2=1-2+2=1$

$f\left(2\right)=2^{2}-2\times2+2=4-4+2=2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}-2x+2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2}-2x+2=\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2}=+\infty$

3) a) $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'\left(x\right)=\left(x^{2}-2x+2\right)'=2x-2=\boxed{2\left(x-1\right)}$

b) Etude du signe de $f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)$: $\forall x\in\mathbb{R}$

Le signe $f'\left(x\right)$ est le signe de : $x-1$

$x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

<u>Le tableau de variations de f</u>

$f\left(1\right)=1^{2}-2\times1+2=1-2+2=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty\searrow$	1	$\nearrow+\infty$

4) L'équation de la tangente à la courbe de f au point $A\left(0;2\right)$ est :

Est : $\left(D\right):y=f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right)$ avec : $a=0$

Donc : $\left(D\right):y=f\left(0\right)+f'\left(0\right)\left(x-0\right)$

On a : $f\left(2\right)=2$ Et on a : $f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)$

Donc : $f'\left(0\right)=2\left(0-1\right)=-2$

Donc : $\left(D\right):y=2+\left(-2\right)\left(x-0\right)$

Donc : $\left(D\right):y=2-2x$

Donc : l'équation de la tangente à la courbe de f au point $A\left(0;2\right)$ est : $\left(D\right):y=-2x+2$

6) la courbe représentative $\left(C_{f}\right)$ et la droite $\left(D\right)$ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Pour construire la courbe représentative $\left(C_{f}\right)$ on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1	2	3	
f(x)	**5**	0	1	2	5	

$f\left(3\right)=3^{2}-2\times3+2=9-6+2=5$

$f\left(-1\right)=\left(-1\right)^{2}-2\times\left(-1\right)+2=1+2+2=5$

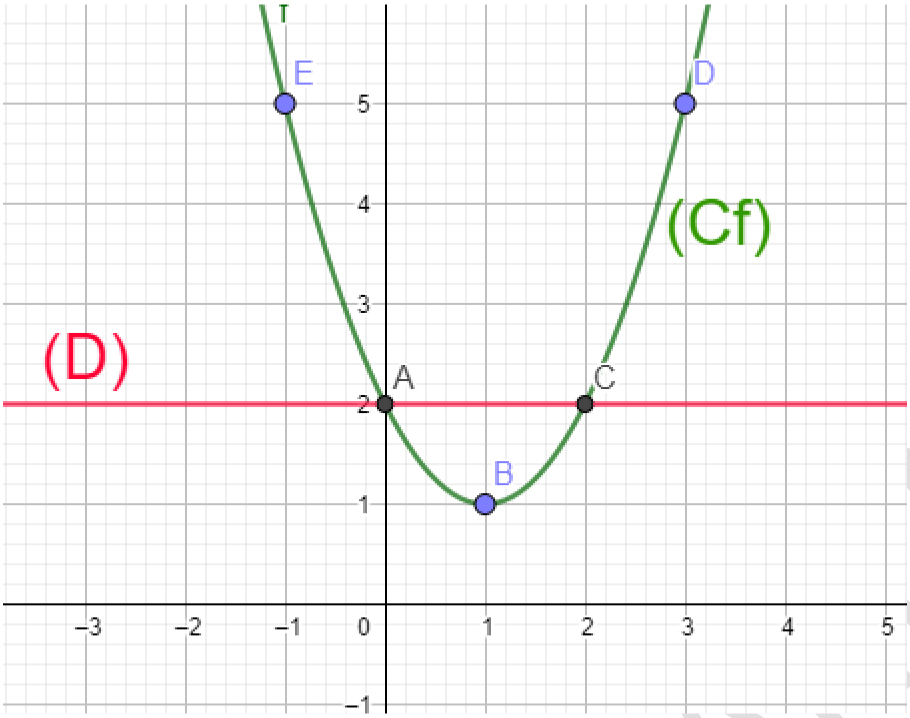
Pour construire la droite $\left(D\right)$ on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

(Deux points suffisent) $\left(D\right):y=-2x+2$

Si x=0 alors : $y=-2\times0+2=0+2=2$

Si x=1 alors : $y=-2\times1+2=-2+2=0$

x	0	1
y	2	0



6) Résolution graphique dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x)\leq 2$

$f(x)\leq 2$ Signifie graphiquement que : La courbe (C_f) est au-dessous de (D)

Et la courbe (C_f) est au-dessous de (D) si $x\in[0;2]$

Donc $S=[0;2]$

Exercice32 : 8points (1pt +1pt +2pt +0.5pt+1.5pt+2pt) Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2018 (Session Rattrapage)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3-3x^2+1$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=6x(x-1)$ avec f' la fonction dérivée de f

b) Etudier le signe de : $x(x-1)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

3) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses

4) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) On a : $f(x)=2x^3-3x^2+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-3x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3-3x^2+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(2x^3-3x^2+1)'=2\times3x^2-3\times2x+0=6x^2-6x=6x(x-1)$

b) le signe de $f'(x)=6x(x-1)$ est le signe de : $x(x-1)$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x-1=0$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

Le tableau de signe de $x(x-1)$ est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f est :

$f(0)=2\times 0^3-3\times 0+1=0-0+1=+1$

$f(1)=2\times 1^3-3\times 1+1=2-3+1=0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$

$$(x-1)^2(2x+1)=\left(x^2-2x\times 1+1^2\right)(2x+1)$$
$$=\left(x^2-2x+1\right)(2x+1)=2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1$$
$$=2x^3-3x^2+1$$
$$=f(x)$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$

b) Etudions les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses :
Les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Sont les solutions de l'équation : $f(x)=0$

$$f(x)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \ ou \ 2x+1=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \ ou \ 2x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=1 \ ou \ x=-\frac{1}{2}$$

La courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points : $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$ et $B(1;0)$

4) Tracer la courbe (C_f).
Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

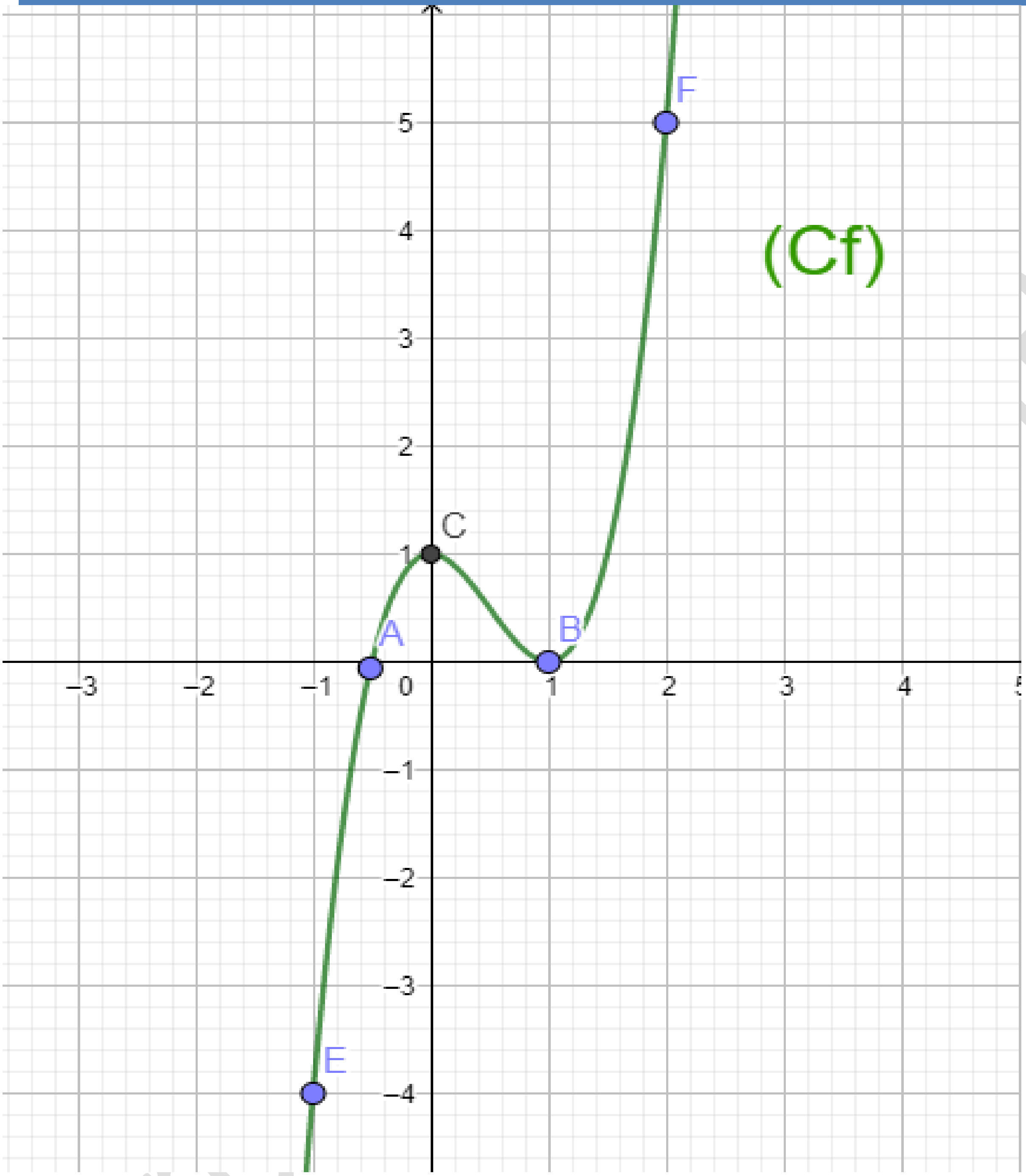
x	-1	0	1	2
f(x)	-4	1	0	5

$f(0)=2\times 0^3-3\times 0+1=0-0+1=+1$

$f(1)=2\times 1^3-3\times 1+1=2-3+1=0$

$f(2)=2\times 2^3-3\times 2^2+1=16-12+1=5$

$f(-1)=2\times(-1)^3-3\times(-1)^2+1=-2-3+1=-4$



Exercice33 : 8points (2pt +2pt +2pt+1pt+1pt) 2018 Dakhla oued Dahab (Session Normale)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{x-3}{x}$

1) Calculer : $f(1)$ et $f(3)$ et $f(-3)$ et $f(-1)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Calculer : $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

5) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et déduire le tableau de variations de f

6) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1)) Calcul de : $f\left(1\right)$ *et* $f\left(3\right)$ *et* $f\left(-3\right)$ *et* $f\left(-1\right)$

$f\left(1\right)=\dfrac{1-3}{1}=\dfrac{-2}{1}=-2$ et $f\left(3\right)=\dfrac{3-3}{3}=\dfrac{0}{3}=0$ et $f\left(-3\right)=\dfrac{-3-3}{-3}=\dfrac{-6}{-3}=2$ et

$f\left(-1\right)=\dfrac{-1-3}{-1}=\dfrac{-4}{-1}=4$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-3}{x}$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} x-3=0-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-3}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} x-3=0-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=+\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=+\infty$

La droite (Δ_1): $x=0$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$

La droite (Δ_2): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{-1\right\}$; $f'(x)=\left(\dfrac{x-3}{x}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x}\right)'=\frac{(x-3)'\times x-(x-3)\times x'}{x^2}=\frac{1x-1\times(x-3)}{x^2}=\frac{x-x+3}{x^2}=\frac{3}{x^2}$$

5) $f'(x)=\dfrac{3}{x^2}\succ 0$

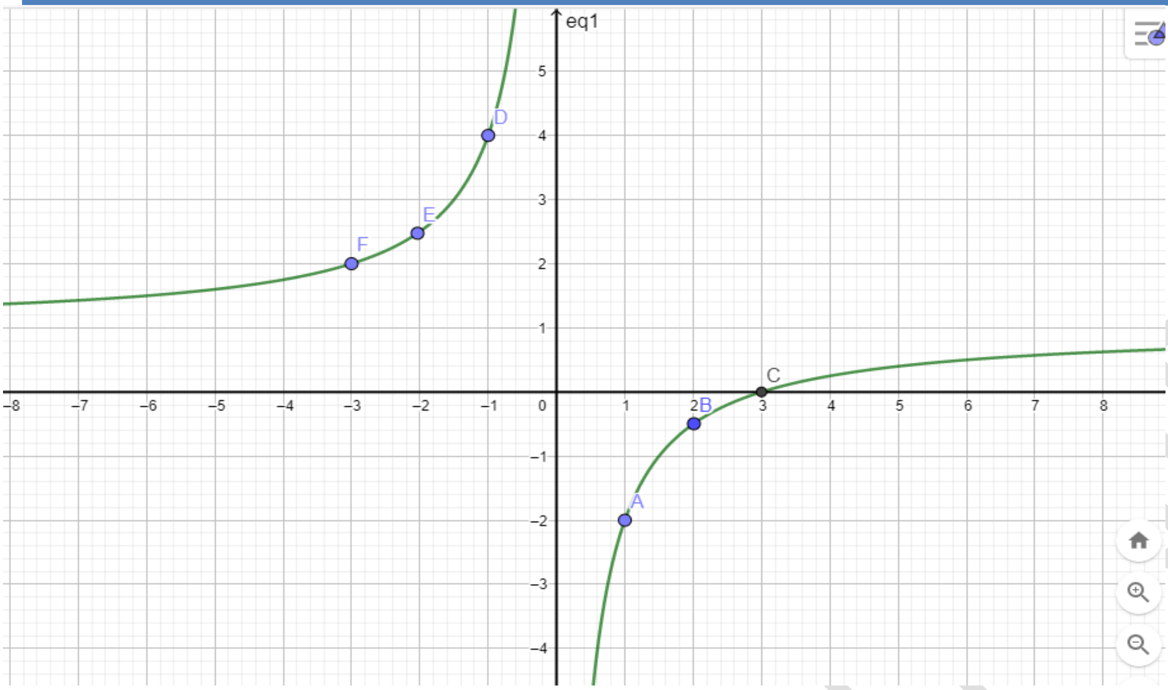
Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

6) la courbe (C_f).

x	-3	-2	-1		1	2	3
$f\left(x\right)$	2	5/2	4		-2	-1/2	0



Exercice34 : 3points (1pt +1pt +1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2018 (Session Normale)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+7}{3x-3}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)$

3) Calculer : $\forall x\in D_f$; $f'(x)$ avec f' la fonction dérivée de f

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x-3\neq0\}$

$3x-3=0\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{3}=1$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{3x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+7}{3x-3}$

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} 2x+7=2\times1+7=2+7=9$ et $\lim\limits_{x\to1^+} 3x-3=0$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$3x-3$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

2) Calculer : $\forall x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$; $f'(x)=\left(\dfrac{2x+7}{3x-3}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+7}{3x-3}\right)'=\frac{(2x+7)'(3x-3)-(2x+7)(3x-3)'}{(3x-3)^2}=\frac{2(3x-3)-(2x+7)\times 3}{(3x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x-6-6x-21}{(3x-3)^2}=\frac{-27}{(3x-3)^2}$$

Exercice35 : 5.5points (1pt +1pt +1pt+1.5pt +1pt) Région de Fès Meknès (Taza Taounat) 2018 (Session Normale)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x^2+2$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

2) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $g'(x)=3x(x-2)$

3) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$ et $g(2)$

4) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Calculer le nombre dérivé : $g'(1)$ et en déduire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1

Solution : 1) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3-3x^2+2=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-3x^2+2=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=\left(x^3-3x^2+2\right)'=3x^2-3\times 2x+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

3) On a : $g(x)=x^3-3x^2+2$

Donc : $g(0)=0^3-3\times 0^2+2=0-0+2=2$

$g(1)=1^3-3\times 1^2+2=1-3+2=0$

$g(2)=2^3-3\times 2^2+2=8-12+2=-2$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $g'(x)=3x(x-2)$

$3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

Le tableau de signe est le suivant :

$g'(x)=3x^2-6x$ $\quad : a=3\succ 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : g est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$

Et g est une fonction strictement décroissante dans $[0;2]$

Le tableau de variation de g est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Car : $g(0)=2$ et $g(2)=-2$

5) a) Calculer du nombre dérivé : $g'(1)$

On a : $g'(x)=3x(x-2) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $g'(1)=3\times1(1-2)=3\times(-1)=-3$

a) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 ?
L'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse a

Est : $(T): y=g(a)+g'(a)(x-a)$

On a : $a=1$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1

Est : $(T): y=g(1)+g'(1)(x-1)$

On a : $g(1)=0$ Et on a : $g'(1)=-3$

Donc : $(T): y=0-3(x-1)$

Donc : $(T): y=-3x+3$

Exercice36 : 8points (0.5pt +1.5pt +1.5pt+1pt +1pt+1pt +1.5pt) Région de Rabat Salé Kénitra 2018(Session Normale)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

1)Déterminer D_f

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

b) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) a) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$ et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

b) En déduire le tableau de variations de f

5)a) Calculer : $f(1)$ *et* $f(3)$ *et* $f(-2)$ *et* $f(-5)$

b) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+1\neq 0\}$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-3}{x+1}$

On a: $\lim\limits_{x\to-1^+} x-3=-1-3=-4$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} x+1=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to-1^+} x+1=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} x-3=-4$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-3}{x+1}$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^-} x+1 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} x-3 = -4$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

La droite (Δ_1): $x = -1$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

b) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

La droite (Δ_2): $y = 1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $f'(x) = \left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)' = \frac{(x-3)'(x+1)-(x-3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1(x+1)-1\times(x-3)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x+3}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} \succ 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} \succ 0$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

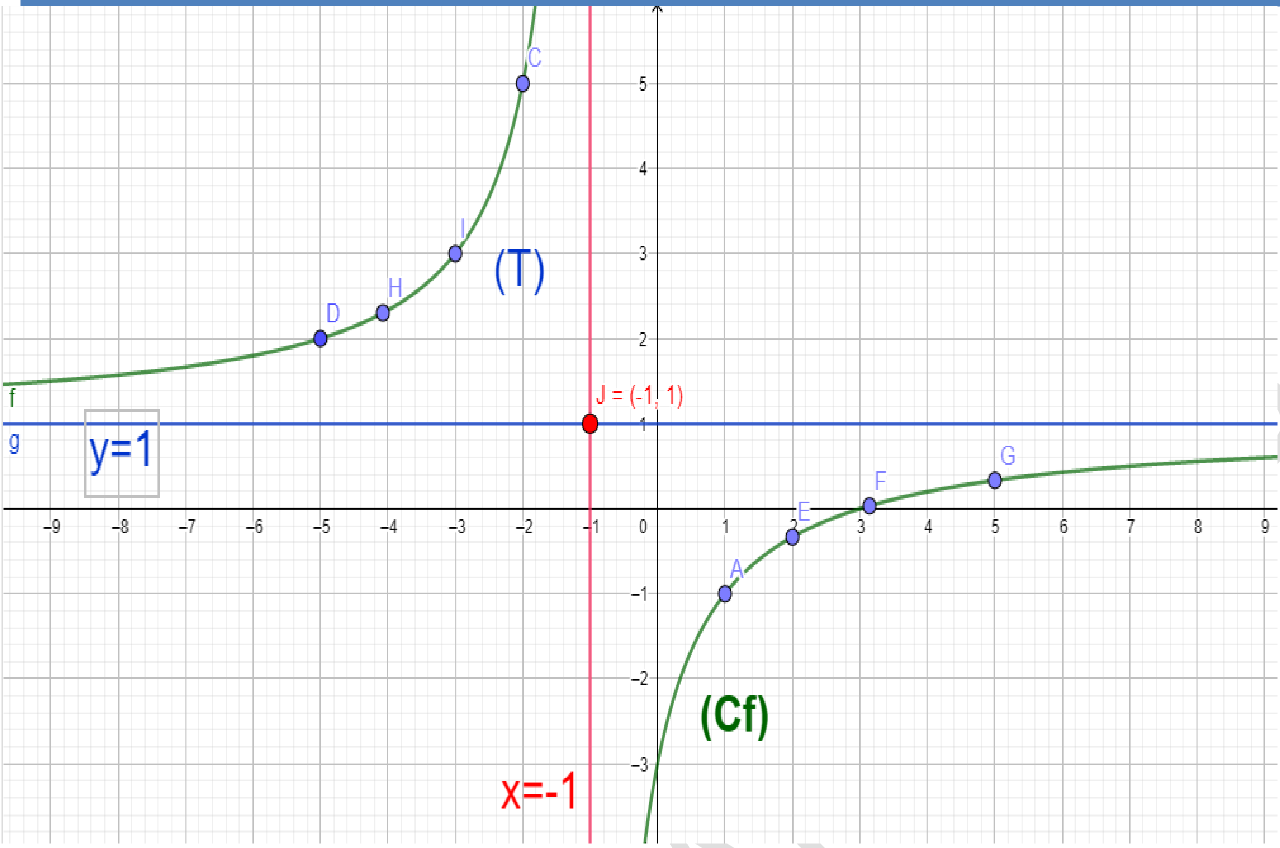
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

5)a) Calcul de : $f(1)$ *et* $f(3)$ *et* $f(-2)$ *et* $f(-5)$

$f(1) = \dfrac{1-3}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ et $f(3) = \dfrac{3-3}{3+1} = \dfrac{0}{4} = 0$ et $f(-2) = \dfrac{-2-3}{-2+1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$ et $f(-5) = \dfrac{-5-3}{-5+1} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

x	-4	-3	-2	[redacted]	0	1	2
$f(x)$	7/3	3	5	[redacted]	-3	-1	-1/3

b) la courbe (C_f).



Exercice37: 8points (2pt +1.5pt +1.5pt+0.5pt+0.5pt+1pt+1pt) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune) 2019 (Session Normale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$

1)a) Calculer : $f(0)$ et $f(1)$ et $f(3)$ et $f(5)$

b) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 2(x-3)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Donner le tableau de variations de f

3) Déterminer L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

4) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

a) $f(0) = 0^2 - 6\times 0 + 5 = 5$

$f(1) = 1^2 - 6\times 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$

$f(3) = 3^2 - 6\times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

$f(5) = 5^2 - 6\times 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 6x + 5 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 6x + 5 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

2)a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \left(x^2 - 6x + 5\right)' = 2x - 6 + 0 = 2x - 6 = 2(x-3)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$

Le tableau de signe est le suivant : $f'(x)=2x-6$ $\quad a=2\succ 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(3)=-4$

3)L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=1$

Est : $(D):y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

On a : $x_0=1$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=1$

Est : $(D):y=f(1)+f'(1)(x-1)$

On a : $f(1)=0$ et $f'(x)=2(x-3)$ donc : $f'(1)=2(1-3)=-4$

Donc : $(D):y=0-4(x-1)$

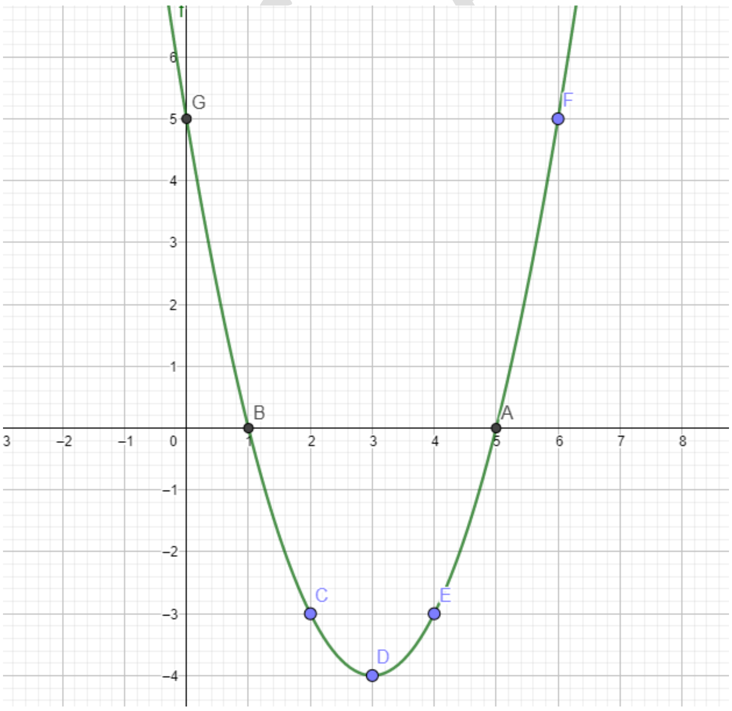
Donc : $(D):y=-4x+4$

Donc : L'équation de la tangente est : $(D):y=-4x+4$

4) La courbe (C_f). :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	5	0	-3	-4	-3	0



Exercice38 : 2points (0.5pt +0.5pt +0.5pt +0.5pt) Région de Rabat Salé Kénitra (Session Normale) 2021

1) $\lim_{x \to -\infty} 4x^2 - 3x + 2$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 6x + 10}$ 3) $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x + 1}{x - 2}$ 4) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

Solution : 1) $\lim_{x \to -\infty} 4x^2 - 3x + 2 = ?$

$$\lim_{x \to -\infty} 4x^2 - 3x + 2 = \lim_{x \to -\infty} 4x^2 = +\infty$$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 6x + 10} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$

3) $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x + 1}{x - 2} = ?$

On a : $\lim_{x \to 2^-} x - 2 = 0^-$ et $\lim_{x \to 2^-} 3x + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim_{x \to 2^-} x - 2 = 0^-$

Par suite : $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x + 1}{x - 2} = -\infty$

4) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

On a : $\lim_{x \to 3} x - 3 = 0$ et $\lim_{x \to 3} x^2 - 9 = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

Donc Formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{6}$$

Exercice39 : 8points (2pt +1.5pt +1.5pt+0.5pt+0.5pt+1pt+1pt)امتحان تجريبي

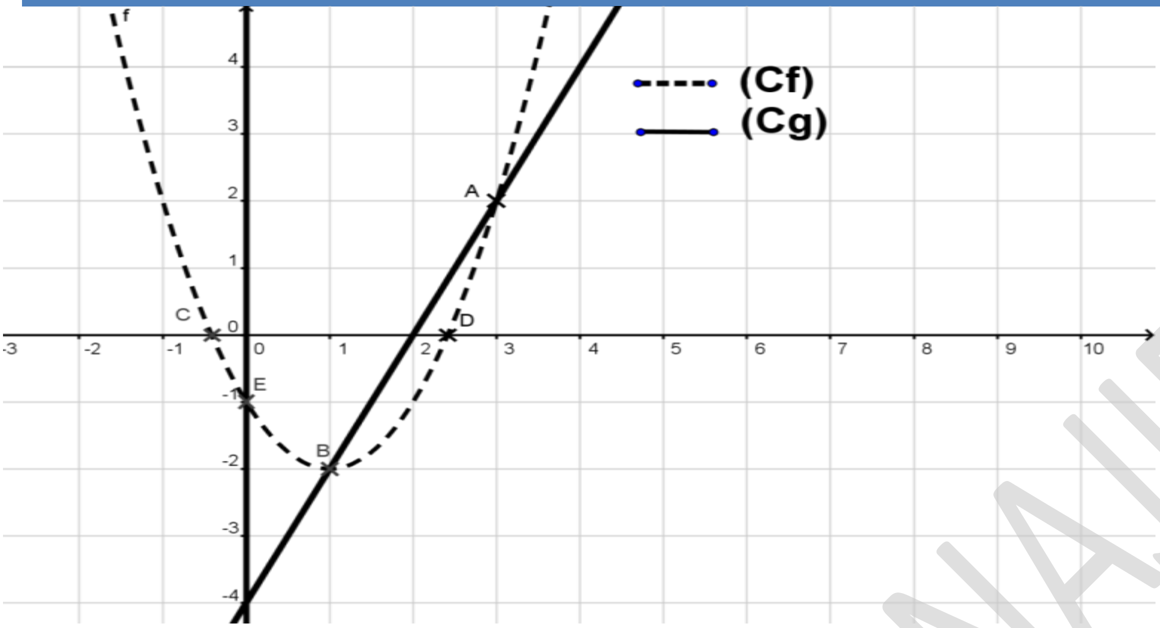
Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 4$

Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :

Voire figure)

- Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$
- Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \succ g(x)$
- Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère



Solutions : 1) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ et $x=3$ donc $S=\{1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2-2x-1=2x-4$ c'est-à-dire : $x^2-4x+3=0$

$a=1$ et $b=-4$ et $c=+3$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

Donc : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ Et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Donc $S=\{1;3\}$

2) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g)

si $x\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$:

$f(x)\succ g(x)$ Signifie $x^2-2x-1\succ 2x-4$

C'est-à-dire : $x^2-4x+3\succ 0$

Les racines sont : $x_1=3$ et $x_2=1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$ $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2>0$

$x_1=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ $x_2=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(1-\sqrt{2};0\right)$ et $D\left(1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

Exercice40 : 6points (1pt +1pt+1pt+1pt+2pt)امتحان تجريبي

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=3x(x-2)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

c) En déduire le tableau de variations de f sur D_f

b) Calculer : $f(3)$ *et* $f(1)$ *et* $f(-1)$ et Tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+4=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+4=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=3x^2-3\times2x+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x(x-2)$

$3x(x-2)=0\Leftrightarrow 3x=0$ *ou* $x-2=0\Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=2$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=3x^2-6x$ $a=3\succ0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[0;2]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(x)=x^3-3x^2+4$

Donc : $f(0)=0^3-3\times0^2+4=0-0+4=4$

$f(2)=2^3-3\times2^2+4=8-12+4=0$

b) Calcul de : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

On a : $f(x)=x^3-3x^2+4$

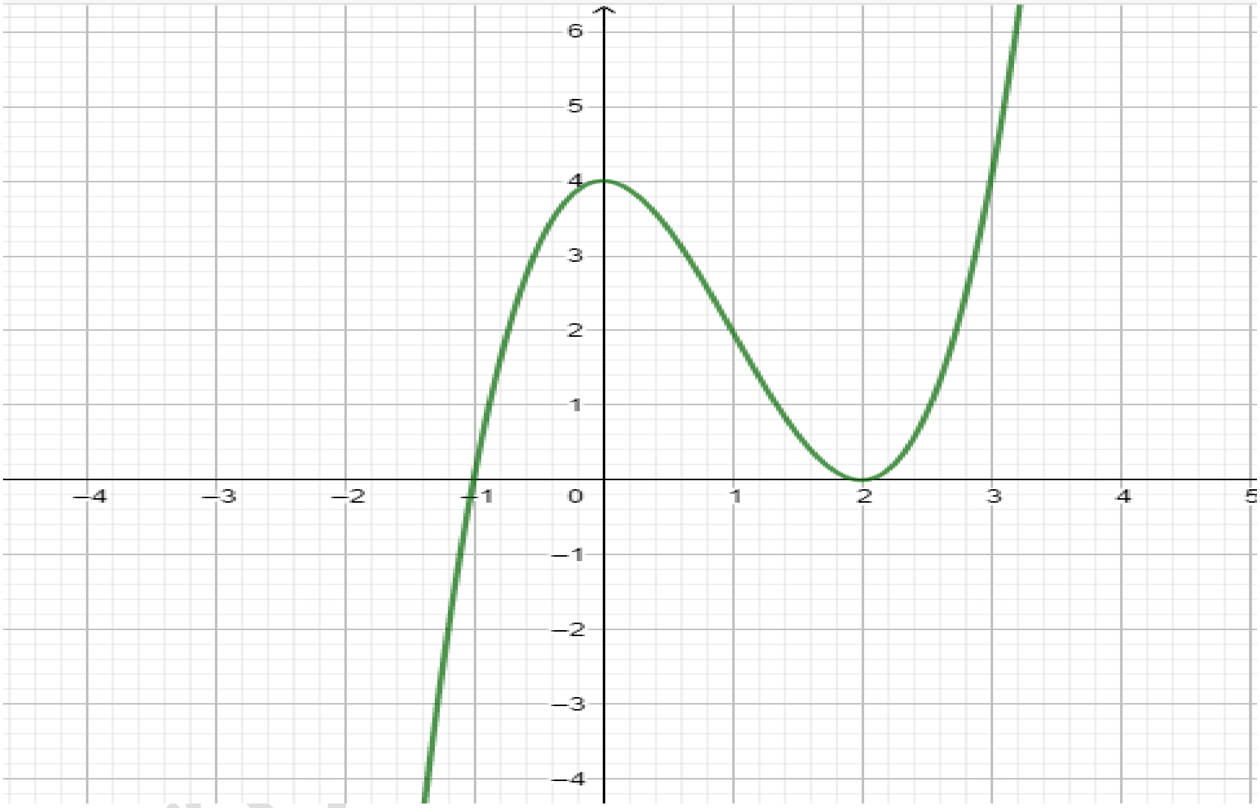
Donc : $f(1)=1^3-3\times1^2+4=1-3+4=2$

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+4=-1-3+4=0$ et $f(3)=3^3-3\times3^2+4=27-27+4=4$

Traçage de la courbe (C_f):

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1	2	3	
f(x)	0	4	2	0	4	



Exercice41 : interrogation 2011 3points (1pt +1pt+1pt)

Soit f une fonction définie par : $f(x)=3x^2-5$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f est une fonction paire
3) Donner une interprétation géométrique (la courbe représentative de f)

Solution :1) f est une fonction polynôme : Donc $D_f=\mathbb{R}$

2)

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.

Exercice5 : interrogation 2012 3points (1pt +1pt+1pt)

Soit g une fonction définie par : $g(x)=\dfrac{3}{x}$

1) Déterminer le domaine de définition de g
2) Montrer que g est une fonction impaire
3) Donner une interprétation géométrique (la courbe représentative de f)

Solution :1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ si et seulement si : $x\neq 0$

Donc : $D_g=\mathbb{R}^*$

2)

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\dfrac{3}{-x}=-\dfrac{3}{x}$
  $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exercice42 : interrogation 2013 4points (1pt +1pt+1pt+1pt)

Soient f et g les fonctions numériques tels que : $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

1) Déterminer leur ensemble de définition
2) Calculer : $g(x)-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$
3) Comparer les fonctions f et g
4) Donner une interprétation géométrique du résultat

Solution : 1) $D_f=D_g=\mathbb{R}$ car des fonctions polynômes

2) $g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1$

3) $g(x)-f(x)=x^2+1\succ 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ donc $f\prec g$

4) La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de la courbe (C_f) de f sur $\mathbb{R}$

Exercice43 : interrogation 2014 3points (1pt +1pt+1pt)

Soient f et g les fonctions numériques tels que : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=x^2$

1) Déterminer leur ensemble de définition :
2) Comparer les fonctions f et g
3) Donner une interprétation géométrique du résultat

Solution : 1) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ car des fonctions polynômes

2) $g(x) - f(x) = x^2 - (x^2 + 1) = -1 \prec 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(x) \prec f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $g \prec f$

3) La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessous de (C_f) La courbe de f sur $\mathbb{R}$

Exercice44 : interrogation 2015 2points

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 2$

Démontrer que f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

Solution : Montrons que $f(x) \le 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

$f(x) - 2 = -x^2 + 2 - 2 = -x^2 \le 0$

Donc $f(x) \le 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 2$

Exercice45 : interrogation 2012 3points (1pt +1pt+1pt)

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ Pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \ge 0$ donc $x^2 + 1 \ge 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \ge 1$ donc $\dfrac{1}{x^2 + 1} \le 1$

Donc : $f(x) \le 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 1$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \ge 0$ donc $x^2 + 1 \ge 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \ge 1$ donc $x^2 + 1 \succ 0$

Donc : $0 \prec f(x)$

Par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 0$

Conclusion : $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice46: interrogation 2016 3points (0.5pt +1.5pt+1pt)

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$

1) Calculer : $f(0)$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(0) \le f(x)$

3) En déduire que : $f(0)$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $f(x) = 5x^2 + 3 \qquad D_f = \mathbb{R}$

1) $f(0) = 5 \times 0^2 + 3 = 3$

2) $f(x) - f(0) = 5x^2 + 3 - 3 = 5x^2 \ge 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(0) \le f(x)$

3) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) \le f(x)$

D'où $f(0)=3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice47 : interrogation 2017 3points (0.5pt +1.5pt+1pt)

Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = -4x^2 + 1$

1) Calculer : $g(0)$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \le g(0)$

3) En déduire que : $g(0)$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $g(x) = -4x^2 + 1 \qquad D_g = \mathbb{R}$

1) $g(0) = -4 \times 0^2 + 1 = 1$

2) $g(x) - g(0) = -4x^2 + 1 - 1 = -4x^2 \le 0$ Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad g(x) \le g(0)$

3) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \le g(0)$

D'où $g(0) = 1$ est un maximum absolu de g sur $\mathbb{R}$

Exercice48 : interrogation 2016 4points (1.5pt +1.5pt+1pt)

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1)a) Montrer que : $f(x) = 6 - (2x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que : $f(x) \le 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$6 - (2x-1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$

$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$

Donc : $f(x) = 6 - (2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2 \ge 0$

Par suite $-(2x-1)^2 \le 0$ donc $6 - (2x-1)^2 \le 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(x) \le 6$

2) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1-1)^2 = 6$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $6 - (2x-1)^2 \le 6$ alors $f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice49 : interrogation 2011 2points

Du tableau de variation on a :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	0,5	↗	2	↘	-2

Donner une valeur maximale et Minimale de f

Solution : Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

Exercice50 : interrogation 2018 3.5 points (1pt +1.5pt+1pt)

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f est une fonction impaire
3) Donner une interprétation géométrique (la courbe représentative de f)

Solution :1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\}$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \; ou \;\; x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 ou \;\; x = -3$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

2)

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R} - \{-3;3\}$, alors $-x \in \mathbb{R} - \{-3;3\}$
- $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{2x}{x^2 - 9}$

  $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) $O(0;0)$ est un centre de symétrique par à la courbe représentative

Exercice51 : interrogation 2019 5 points (3pt +2pt)

Soient les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-6} \;\; et \;\; g(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$

1) Déterminer $D_f \;\; et \;\; D_g$

2) Montrer que g est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$

Solution :1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 6 \neq 0\}$

$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \; impossible$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Montrons que f est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$:

Il suffit de montrer que : $g(x) \leq 3 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$?

$3 - g(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2+1} = \dfrac{3x^2 + 3 - 3}{x^2+1} = \dfrac{3x^2}{x^2+1} \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(x) \leq 3 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice52 : interrogation 2019 5 points (3pt +1pt+1pt)

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{2x^2-1}{3x-12}$ et $g(x)=x^2-4x+5$

1) Déterminer D_f et D_g

2) calculer : $g(2)$

3) Montrer que g est minorée par $g(2)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x-12\neq 0\}$

$3x-12=0\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=\frac{12}{3}\Leftrightarrow x=4$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$

b) $g(x)=x^2-4x+5$ g est une fonction polynôme

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) calcul de : $g(2)$

$g(2)=2^2-4\times 2+5=4-8+5=-4+5=1$

3) Montrons que f est minorée par $g(2)=1$ sur $\mathbb{R}$:

Il suffit de montrer que : $1\leq g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$?

$g(x)-1=x^2-4x+5-1=x^2-4x+4=x^2-2\times 2x+2^2=(x-2)^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $g(x)-1\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : $1\leq g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Conclusion : g est minorée par $g(2)=1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice53 : interrogation 2020 5 points (3pt +2pt)

Soient les fonctions f et g définies par :

$f(x)=\frac{3x^2-2}{2x-10}$ et $g(x)=x^2-6x+10$

1) Déterminer D_f et D_g 2) calculer : $g(3)$

3) Montrer que g est minorée par $g(3)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-10\neq 0\}$

$2x-10=0\Leftrightarrow 2x=10\Leftrightarrow x=\frac{10}{2}\Leftrightarrow x=5$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{5\}$

b) $g(x)=x^2-6x+10$ g est une fonction polynôme

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) calcul de : $g(3)$

$g(2)=3^2-6\times 3+10=9-18+10=19-18=1$

3) Montrons que f est minorée par $g(3)=1$ sur $\mathbb{R}$:

Il suffit de montrer que : $1\leq g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$?

$g(x)-1=x^2-6x+10-1=x^2-6x+9=x^2-2\times 3x+3^2=(x-3)^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $g(x)-1\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ Par suite : $1\leq g(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$

Conclusion : g est minorée par $g(3)=1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice54 : interrogation 2015 4points (1pt +1 pt+1pt+1pt)

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-9x^2-4x^3+1$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x^6-2x^5+3x-15$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-9x^2-4x^3+1$

On sait que : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ est la limite de son plus Grand terme en $+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-9x^2-4x^3+1=\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^3=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x^6-2x^5+3x-15$

On sait que : La limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ est la limite de son plus Grand terme en $-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x^6-2x^5+3x-15=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^6=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

Remarque :1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\dfrac{?}{0^+}$ et $\dfrac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercice55 : interrogation 2018 <u>11 points</u> (1pt +2pt+2pt+2pt+2pt+2pt)

Calculer les limites suivantes **:**

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+7}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+1}{5x-10}$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+1}{5x-10}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}-6x^2-3x+1$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5+x^2+2}{5x^3+x}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+7}}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2} 4x-5=3$ et $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x+7}}=\dfrac{3}{3}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

On a : $\lim\limits_{x\to 5} x^2-25=5^2-25=25-25=0$ et $\lim\limits_{x\to 5} x-5=0$

Donc Formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}x+5=5+5=10$$

3) $a)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{3x+1}{5x-10}$

On a : $\lim_{x\to 2^+}5x-10=0$ **et** $\lim_{x\to 2^+}3x+1=6+1=7$

On va étudier le signe de : $5x-10$

$$5x-10=0\Leftrightarrow 5x=10\Leftrightarrow x=\frac{10}{5}\Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$5x-10$	$-$	0	$+$

On a donc : $\lim_{x\to 2^+}5x-10=0^+$

Donc $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+1}{5x-10}=+\infty$

$b)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{3x+1}{5x-10}=?$ On a : $\lim_{x\to 2^-}5x-10=0^-$ et $\lim_{x\to 2^-}3x+1=6+1=7$

Donc $\lim_{x\to 2^-}\frac{3x+1}{5x-10}=-\infty$

4) $\lim_{x\to +\infty}-6x^2-3x+1=?$

$$\lim_{x\to +\infty}-6x^2-3x+1=\lim_{x\to +\infty}-6x^2=-\infty$$

5) $\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^5+x^2+2}{5x^3+x}=?$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^5+x^2+2}{5x^3+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^5}{5x^3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^5}{x^3}=\lim_{x\to -\infty}x^{5-3}=\lim_{x\to -\infty}x^2=+\infty$$

6) $\lim_{x\to +\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=?$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to +\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\times 10x\times x\times x}{10\times x\times x\times x\times x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0^+$$

Exercice56 : interrogation 2018 11 points (1pt +2pt+2pt+2pt+2pt+2pt)

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}+\frac{x+2}{2}$ 2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ 3) $\lim_{x\to 6^+}\frac{x+1}{2x-12}$ *et* $\lim_{x\to 6^-}\frac{x+1}{2x-12}$

4) $\lim_{x\to +\infty}-5x^2+2x-6$ 5) $\lim_{x\to -\infty}\frac{10x^3-x+1}{5x^2-2x+2}$ 6) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}$

Solution : $1)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}+\frac{x+2}{2}$

On a : $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$ et $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2}=\frac{2+2}{2}=2$

Donc : $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}+\frac{x+2}{2}=3+2=5$

$2)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

On a : $\lim_{x\to 5}x^2-25=5^2-25=25-25=0$ et $\lim_{x\to 5}x-5=0$

Donc Formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}x+5=5+5=10$$

$3)\ a)\ \lim_{x\to 6^+}\frac{x+1}{2x-12}$

On a : $\lim_{x\to 6^+}x+1=7$ **et** $\lim_{x\to 6^+}2x-12=12-12=0$

On va étudier le signe de : $2x-12$

$2x-12=0\Leftrightarrow 2x=12\Leftrightarrow x=\frac{12}{2}\Leftrightarrow x=6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$2x-12$	$-$	0	$+$

On a donc : $\lim_{x\to 6^+}2x-12=0^+$ et $\lim_{x\to 6^+}x+1=7$

Donc $\lim_{x\to 6^+}\frac{x+1}{2x-12}=+\infty$

$b)\ \lim_{x\to 6^-}\frac{x+1}{2x-12}=?$ On a : $\lim_{x\to 6^-}2x-12=0^-$ et $\lim_{x\to 6^-}x+1=7$

Donc $\lim_{x\to 6^-}\frac{x+1}{2x-12}=-\infty$

$4)\ \lim_{x\to+\infty}-5x^2+2x-6\ =?$

$$\lim_{x\to+\infty}-5x^2+2x-6=\lim_{x\to+\infty}-5x^2=-\infty$$

$5)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3-x+1}{5x^2-2x+2}\ ?$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3-x+1}{5x^2-2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^3}{5x^2}=\lim_{x\to-\infty}2\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x^{3-2}=\lim_{x\to-\infty}2x^1=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$6)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}\ ?$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times 2x\times x}{2\times x\times x\times x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^3-5x+11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$$

Exercice57 : interrogation 2019 (0.5pt +1.5pt pt+2pt+1pt+1pt+1pt)

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}+\frac{x+7}{2}$ 2) $\lim_{x\to10}\frac{x^2-100}{x-10}$ 3) $\lim_{x\to4^+}\frac{x-1}{3x-12}$ *et* $\lim_{x\to4^-}\frac{x-1}{3x-12}$

4) $\lim_{x\to-\infty}7x^2-3x-9$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{15x^3+2x-1}{5x^2-x+1}$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2+2x+8}{2x^3-4x+7}$

Solution : 1) $\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}+\frac{x+7}{2}$

On a : $\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ et $\lim_{x\to1}\frac{x+7}{2}=\lim_{x\to1}\frac{1+7}{2}=4$

Donc : $\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}+\frac{x+7}{2}=2+4=6$

2) $\lim_{x\to10}\frac{x^2-100}{x-10}=?$

On a : $\lim_{x\to10}x^2-100=10^2-100=100-100=0$ et $\lim_{x\to10}x-10=10-10=0$

Donc Formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to10}\frac{x^2-100}{x-10}=\lim_{x\to10}\frac{x^2-10^2}{x-10}=\lim_{x\to10}\frac{(x-10)(x+10)}{x-10}=\lim_{x\to10}x+10=10+10=20$$

3) $a)\ \lim_{x\to4^+}\frac{x-1}{3x-12}=?$

On a : $\lim_{x\to4^+}x-1=3$ **et** $\lim_{x\to4^+}3x-12=12-12=0$

On va étudier le signe de : $3x-12$

$3x-12=0\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=\frac{12}{3}\Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
$3x-12$	$-$ 0 $+$

On a donc : $\lim_{x\to4^+}3x-12=0^+$ et $\lim_{x\to4^+}x-1=3$ Donc $\lim_{x\to4^+}\frac{x-1}{3x-12}=+\infty$

$3)b)\ \lim_{x\to4^-}\frac{x-1}{3x-12}=?$ On a : $\lim_{x\to4^-}3x-12=0^-$ et $\lim_{x\to4^-}x-1=3$

Donc $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-1}{3x-12} = -\infty$

4) $\lim_{x\to -\infty} 7x^2 - 3x - 9 \quad = ?$

$\lim_{x\to -\infty} 7x^2 - 3x - 9 = \lim_{x\to -\infty} 7x^2 = +\infty$

5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{15x^3 + 2x - 1}{5x^2 - x + 1} \quad ?$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{15x^3 + 2x - 1}{5x^2 - x + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{15x^3}{5x^2} = \lim_{x\to +\infty} 3\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} 3x^{3-2} = \lim_{x\to +\infty} 2x^1 = \lim_{x\to +\infty} 3x = +\infty$

6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{10x^2 + 2x + 8}{2x^3 - 4x + 7} \quad ?$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{10x^2 + 2x + 8}{2x^3 - 4x + 7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10x^2}{2x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\times 5x \times x}{2\times x \times x \times x}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{10x^2 + 2x + 8}{2x^3 - 4x + 7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x} = 0^+$

Exercice58 : interrogation 2020 (1pt +2pt+2pt+2pt+2pt+2pt)

Calculer les limites suivantes **:**

1) $\lim_{x\to 5} \frac{2x-6}{\sqrt{x+11}}$ 2) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-6}$ 3) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-4}{3x-9}$ *et* $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-4}{3x-9}$

4) $\lim_{x\to +\infty} -5x^3 + 7x + 2$ 5) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4 + x^2 + 2}{3x^2 - x}$ 6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2 - 7x + 1}{3x^3 - 5x - 1}$

Solution : 1) $\lim_{x\to 5} \frac{2x-6}{\sqrt{x+11}}$

On a : $\lim_{x\to 5} 2x - 6 = 4$ et $\lim_{x\to 5} \sqrt{x+11} = \sqrt{5+11} = \sqrt{16} = 4$

Donc : $\lim_{x\to 5} \frac{2x-6}{\sqrt{x+11}} = \frac{4}{4} = 1$

2) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

On a : $\lim_{x\to 4} x^2 - 16 = 4^2 - 16 = 16 - 16 = 0$ et $\lim_{x\to 4} x - 4 = 0$

Donc Formes indéterminée : $"\frac{0}{0}"$

$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4^2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x + 4 = 4 + 4 = 8$

3) $a)$ $\lim_{x\to 2^+} \frac{3x+1}{5x-10}$

On a : $\lim_{x\to 2^+} 5x - 10 = 0$ **et** $\lim_{x\to 2^+} 3x + 1 = 6 + 1 = 7$

On va étudier le signe de : $5x - 10$

$5x-10=0 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{5} \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$5x-10$	$-$ 0 $+$

On a donc : $\lim_{x\to 2^+} 5x-10=0^+$

Donc $\lim_{x\to 2^+} \frac{3x+1}{5x-10} =+\infty$

$b) \lim_{x\to 2^-} \frac{3x+1}{5x-10}=?$ On a : $\lim_{x\to 2^-} 5x-10=0^-$ et $\lim_{x\to 2^-} 3x+1=6+1=7$

Donc $\lim_{x\to 2^-} \frac{3x+1}{5x-10} =-\infty$

4) $\lim_{x\to -\infty} 5x^2+7x+2 =?$

$\lim_{x\to -\infty} 5x^2+7x+2= \lim_{x\to -\infty} 5x^2=+\infty$

5) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+x^2+2}{3x^2-x}=?$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+x^2+2}{3x^2-x}=\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4}{3x^2}=\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to -\infty} x^{4-2}=\lim_{x\to -\infty} x^2=+\infty$

6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2-7x+1}{3x^3-5x-1}=?$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2-7x+1}{3x^3-5x-1}=\lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2}{3x^3}=\lim_{x\to +\infty} \frac{3\times 4\times x\times x}{3\times x\times x\times x}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2-7x+1}{3x^3-5x-1}=\lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x}=0^+$

Exercice59 :_interrogation 2017 11 points (1pt +2pt+2pt+2pt+2pt+2pt)

1) $\lim_{x\to 4} \frac{2x-5}{\sqrt{x+5}}$ 2) $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-36}{x-6}$ 3) $\lim_{x\to 4^+} \frac{x-3}{2x-8}$ *et* $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-3}{2x-8}$

4) $\lim_{x\to -\infty} 5x^2+7x+2$ 5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^4+3x^2+1}{7x^3-2x}$ 6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{6x^2+3x+5}{2x^3-5x-1}$

Solution : 1) $\lim_{x\to 4} \frac{2x-5}{\sqrt{x+5}}$

On a : $\lim_{x\to 4} 2x-5=3$ et $\lim_{x\to 4} \sqrt{x+5}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$

Donc : $\lim_{x\to 4} \frac{2x-5}{\sqrt{x+5}}=\frac{3}{3}=1$

2) $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-36}{x-6}$

On a : $\lim\limits_{x\to 6} x^2-36=6^2-36=36-36=0$ et $\lim\limits_{x\to 6} x-6=0$

Donc Formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x^2-6^2}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x+6)}{x-6}=\lim_{x\to 6} x+6=6+6=12$$

3) $a)$ $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x-3}{2x-8}$

On a : $\lim\limits_{x\to 4^+} x-3=1$ **et** $\lim\limits_{x\to 4^+} 2x-8=8-8=0$

On va étudier le signe de : $2x-8$

$2x-8=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{2} \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
$2x-8$	$-$ 0 $+$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 4^+} 2x-8=0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x-3}{2x-8}=+\infty$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x-3}{2x-8}=?$ On a : $\lim\limits_{x\to 4^-} 2x-8=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} x-3=1$

Donc $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x-3}{2x-8}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5x^2+7x+2=?$

$$\lim_{x\to -\infty} 5x^2+7x+2=\lim_{x\to -\infty} 5x^2=+\infty$$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{7x^4+3x^2+1}{7x^3-2x}=?$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^4+3x^2+1}{7x^3-2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^4}{7x^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{x^3}=\lim_{x\to -\infty} x^{4-3}=\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6x^2+3x+5}{2x^3-5x-1}=?$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2+3x+5}{2x^3-5x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2}{2x^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\times 3x\times x}{2\times x\times x\times x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2+3x+5}{2x^3-5x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x}=0^+$$

Exercice60 :_interrogation 2017 4 points (2pt+2pt)

On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2$.

1) Montrer que f est dérivable en $a=1$ et préciser $f'(1)$

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $a=1$

Solution : 1) On calcul : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$ on a : $f(1)=2\times1^2=2$

Donc : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}$

$\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$

Donc f est dérivable en en $a=1$ et $f'(1)=4$

2) L'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a $a=1$: donc : $(T):y=f(1)+f'(1)(x-1)$ et On a : $f(1)=2\times1^2=2$ et $f'(1)=4$

Donc : $(T):y=2+4(x-1)$

Donc : $(T):y=2+4x-4$ Donc : $(T):y=4x-2$

Exercice61 :_interrogation 2018 5 points (1pt+2pt+2pt)

On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$.

1) vérifier que : $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

2) Montrer que f est dérivable en $a=-2$ et préciser $f'(-2)$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $a=-2$

Solution : 1) $(x+2)(x-1)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$

2)On calcul : $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=?$ on a : $f(-2)=(-2)^2-2-3=4-5=-1$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

3) L'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a $a=-2$: donc : $(T):y=f(-2)+f'(-2)(x-(-2))$ et On a : $f(-2)=-1$ et $f'(-2)=-3$

Donc : $(T):y=-1-3(x+2)$

Donc : $(T):y=-1-3x-6$ Donc : $(T):y=-3x-7$

Exercice62:_interrogation 2012 4 points (2pt+2pt)

Déterminer les fonctions dérivées dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$

$f'(x)=(x^2)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ Avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)' = \frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

Exercice63 :_interrogation 2015 4 points (2pt +2pt)

Soient les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Calculer : $f'(x)$ et $g'(x)$

Solution : 1) a) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

b) $g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\}$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2) a) Calcul de : $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$

b) Calcul de : $g'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $g'(x) = \left(\frac{3x+1}{x-1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x+1}{x-1}\right)' = \frac{(3x+1)'(x-1)-(3x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)-1\times(3x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x-3-3x-1}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$$

Exercice64 : interrogation 2016 4 points (2pt +2pt)

Soient les fonctions f et g définies par :

$f(x)=3x^3-2x+5$ et $g(x)=\frac{1}{2x-1}$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Calculer : $f'(x)$ et $g'(x)$

Solution : 1) a) $f(x)=3x^3-2x+5$

On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

b) $g(x)=\frac{1}{2x-1}$ $\quad D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}$

$2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) a) Calcul de : $f'(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(3x^3-2x+5)'=3x^2-2$

b) Calcul de : $g'(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $g'(x)=\left(\frac{1}{2x-1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=-\frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2}=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

Exercice65 : interrogation 2009 4 points (2pt +2pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$

Et Donner une interprétation géométrique de ces limites

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) a) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$ $\quad \lim\limits_{x\to2^+}2x-1=3$ **et** $\lim\limits_{x\to2^+}3x-6=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to2^-}3x-6=0^-$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ) : $x=2$ est une asymptote verticale a la courbe C_f

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ) : $y = \frac{2}{3}$ est une asymptote horizontale a la courbe C_f

Exercice66 : interrogation 2015 12 points (1pt +1pt+1pt +1.5pt+1pt+0.5pt+1pt+1pt+1pt+1pt+1pt+1pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 4x + 3$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Déterminer les points d'Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

7) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

8) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

9) Tracer la droite (D) d'équation : $(D): y = 3$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

10) Déterminer les points d'Intersection de la courbe (C_f) et la droite (D)

11) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 + 4x \geq 0$

Solutions :

1) On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = \boxed{2x + 4}$

4) Etude du signe de $f'(x)$: $\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x + 4$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $[-2;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;-2]$

5)Le tableau de variations de f

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

6)Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ $\qquad x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4-2}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ Et $D(-3;0)$

7) Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

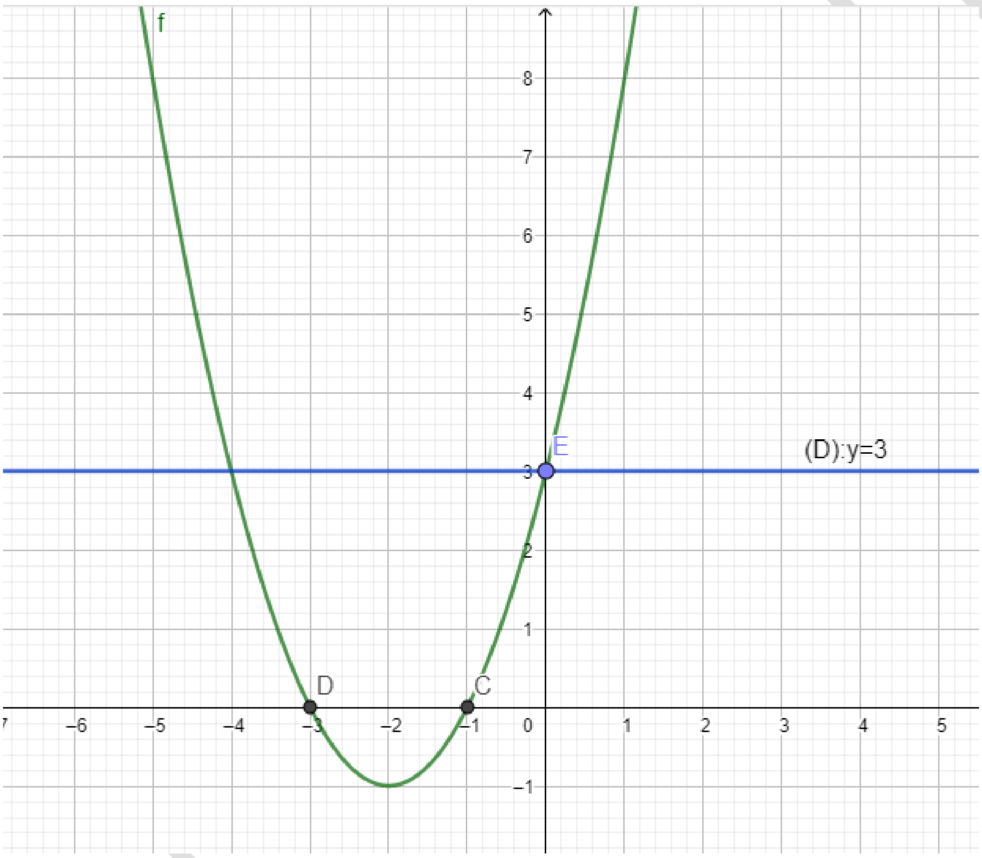
Et on a $f(0)=0^2+4\times0+3=3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

8) et 9) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



10) Pour déterminer les points d'Intersection de la courbe (C_f) et la droite $(D): y=3$

On va résoudre l'équation : $f(x)=y$

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2+4x+3=3 \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x+4=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-4$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) et la droite $(D): y=3$ sont :

$A(0;3)$ et $B(-4;3)$

11) Résolution graphique dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2+4x\geq0$

$x^2+4x\geq 0 \Leftrightarrow x^2+4x+3\geq 0+3 \Leftrightarrow f(x)\geq 3$

La courbe (C_f) est au-dessus de (D) si $x\in]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$

Exercice67 : interrogation 2015 9points (1pt +1pt+1pt +1.5pt+2pt+2.5pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+3$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Tracer la courbe Cf

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x+3=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(x^3-3x+3\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3(x-1)(x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

$(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ *ou* $x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ *ou* $x=-1$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=3x^2-3$ $a=3\succ 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

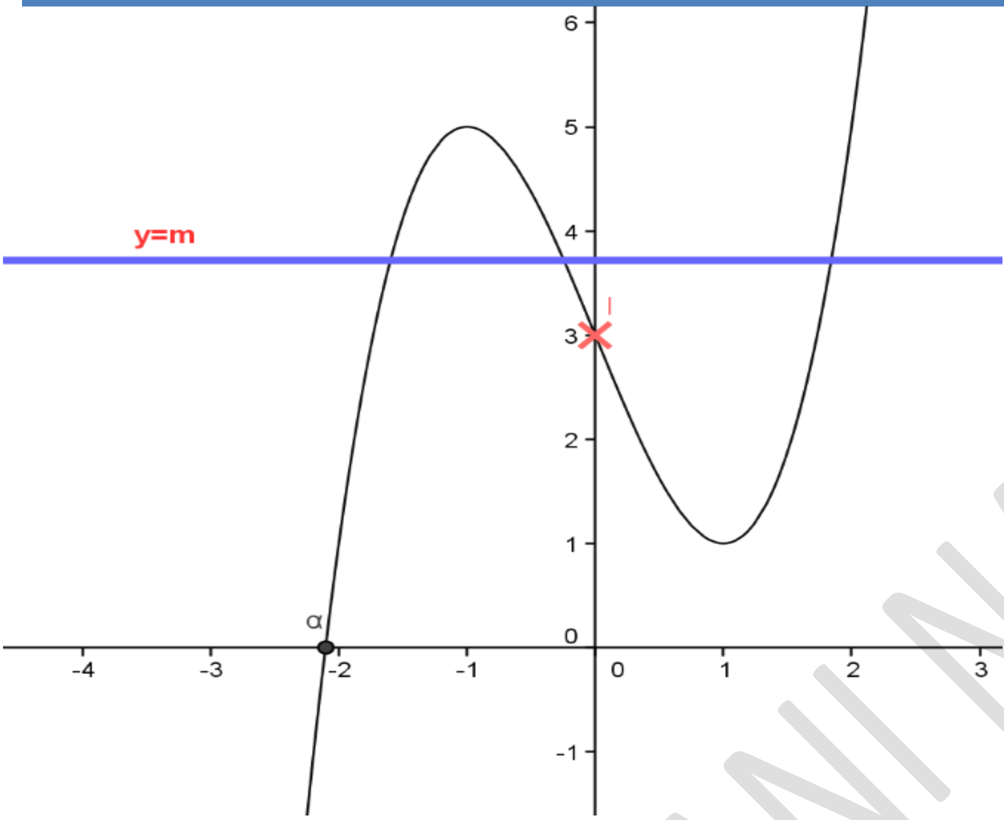
5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[-1;1]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6)



Exercice68 : interrogation 2016 9points (0.5pt +2pt+0.5pt +1.5pt+2pt+2.5pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Calculer : $\forall x \in D_f$; $f'(x)$ et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Tracer la courbe Cf

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}$

On a: $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+1=2(-1)+1=-2+1=-1$ **et** $\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=-1+1=0$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$x+1$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+1=-1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} x+1 = 0^-$ **et** $\lim\limits_{x\to -1^-} 2x+1 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

La droite (Δ_1): $x = -1$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

b) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$

La droite (Δ_2): $y = 2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$; $f'(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x+1)-(2x+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-1\times(2x+1)}{(x+1)^2}$$

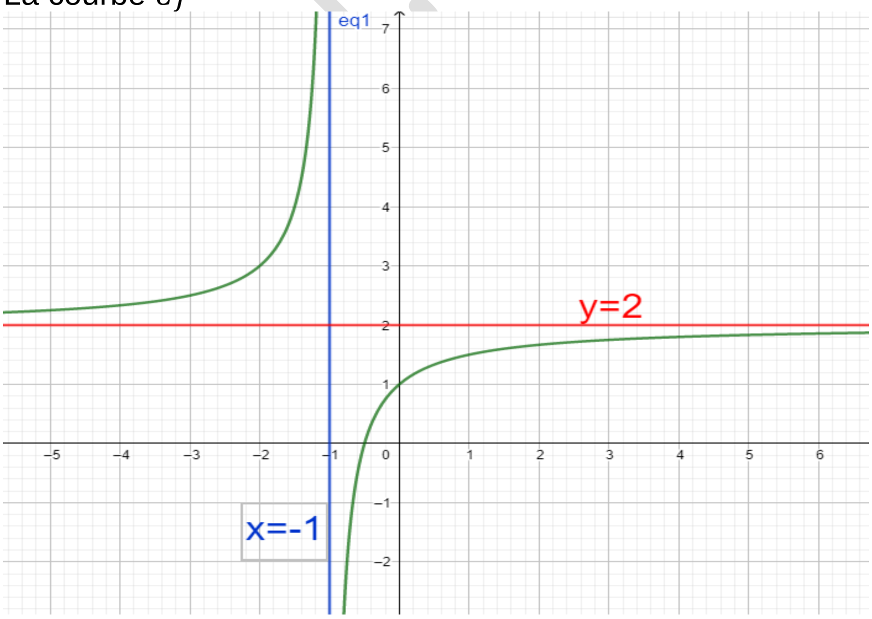
$$f'(x) = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \succ 0$$

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\left]-\infty;-1\right[$ et sur $\left]-1;+\infty\right[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

1) La courbe Cf



Exercice69 :_interrogation 2017 16points (1pt +3pt+2pt+2pt +2pt+2pt+2pt+2pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x\prec -2}} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Vérifier que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$

et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

7) Remplir le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$							

8) Tracer la courbe (C_f).

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}$

On a : $\lim\limits_{x\to -2^+} 2x-1=2(-2)-1=-4-1=-5$ **et** $\lim\limits_{x\to -2^+} x+2=-2+2=0$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$x+2$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to -2^+} x+2=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to -2^+} 2x-1=-5$

Donc : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to -2^-} x+2=0^-$ **et** $\lim\limits_{x\to -2^-} 2x-1=-5$

Donc : $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$

La droite (Δ_1): $x=-2$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

a) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

La droite (Δ_2): $y = 2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]-2;+\infty\right[$; $f'(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \frac{(2x-1)'(x+2)-(2x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)-1\times(2x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \succ 0$$

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\left]-\infty;-2\right[$ et sur $\left]-2;+\infty\right[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

6) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a : $a = 0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T): y = f(0) + f'(0)(x-0)$

On a : $f(0) = \dfrac{2\times 0 - 1}{0+2} = -\dfrac{1}{2}$

Et on a : $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

Donc : $f'(0) = \dfrac{5}{(0+2)^2} = \dfrac{5}{4}$

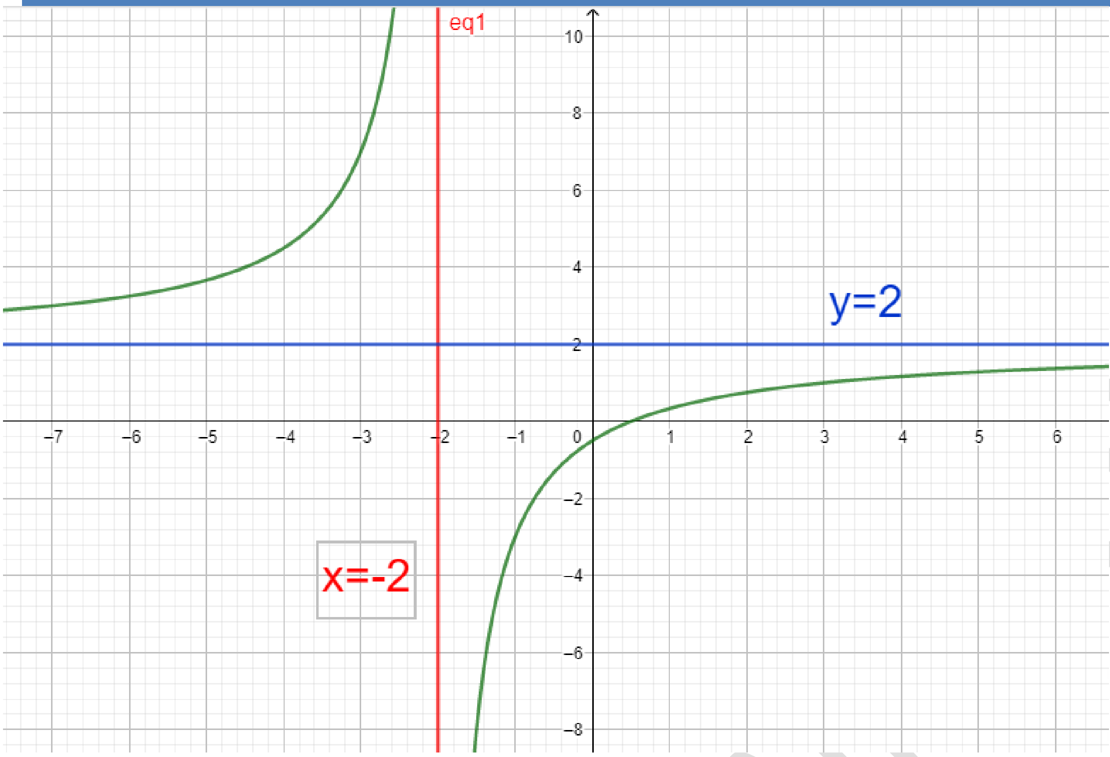
Donc : $(T): y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}(x-0)$

Donc : $(T): y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}x$

7)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	9/2	7		-3	-1/2	1/3

8) La courbe Cf



Exercice70 :_interrogation 2014 16points (1pt +3pt+2pt+2pt +2pt+2pt+2pt+2pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=3x(x-2)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

5) En déduire le tableau de variations de f sur D_f

6) Calculer : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

8) Tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(x^3-3x^2\right)'=3x^2-3\times 2x=3x^2-6x=3x(x-2)$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x(x-2)$

$3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow x=0 ou$ $x=2$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=3x^2-6x$ $a=3\succ 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[0;2]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(x)=x^3-3x^2$

Donc : $f(0)=0^3-3\times0^2=0-0=0$

$f(2)=2^3-3\times2^2=8-12=-4$

6) Calcul de : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

On a : $f(x)=x^3-3x^2$

Donc : $f(1)=1^3-3\times1^2=1-3=-2$

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2=-1-3=-4$

$f(3)=3^3-3\times3^2=27-27=0$

7) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 ?
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T):y=f(3)+f'(3)(x-3)$

On a : $f(3)=0$ Et on a : $f'(x)=3x(x-2)$

Donc : $f'(3)=3\times3(3-2)=9\times1=9$

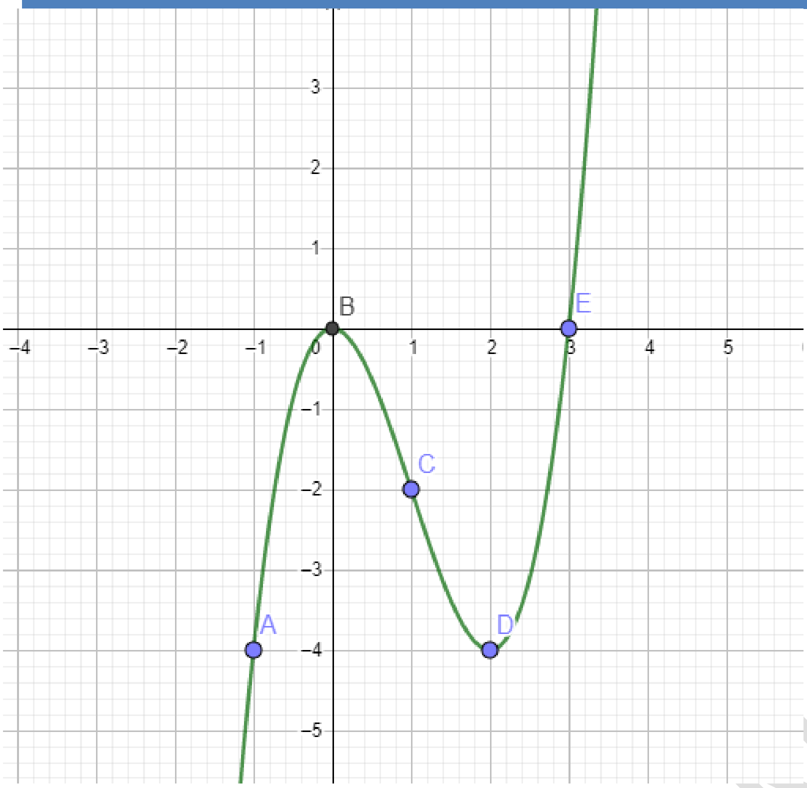
Donc : $(T):y=0+9(x-3)$

Donc : $(T):y=9x-27$

8) Traçage de la courbe (C_f) :

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1	2	3	
f(x)	-4	0	-2	-4	0	



Exercice71: interrogation 2014 3 points (1pt +2pt)

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + 4x + 4$ et $g(x) = 2x + 3$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Etudier la position relative de la courbe de f et la courbe de g sur $\mathbb{R}$

Solution :1) $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

$D_g = \mathbb{R}$ car g est une fonction polynôme

2)$f(x) - g(x) = (x^2 + 4x + 4) - (2x + 3)$

$f(x) - g(x) = x^2 + 4x + 4 - 2x - 3 = x^2 + 2x + 1$

$f(x) - g(x) = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de (C_g) La courbe de g sur $\mathbb{R}$