Devoir libre1 : Exercices LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

http://www.xriadiat.com/

Correction : devoir libre1 : de préparation pour les devoirs surveillés

Exercice1 : Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes

1) $P\ "(2\geq 1\ \ et\ \ -1\in\mathbb{N}\ )"$

2) $Q\ "\left(\sqrt{3}\geq 2\ \ ou\ \ \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\ \right)"$

3) $R\ "\forall x\in\mathbb{R}/2x\geq 0"$

4) $M\ "\exists x\in\mathbb{R}/2x-1=3"$

5) $N\ "\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$

6) $F\ "\exists!x\in\mathbb{R}/2x^2-1=3"$

7) $K\ "\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x+3=0"$

Solution : 1) La proposition :

$P\ "(2\geq 1\ \ et\ \ -1\in\mathbb{N}\ )"$ est fausse

Car $"2\geq 1\ "$ est vraie et $"-1\in\mathbb{N}"$ est fausse

La négation de « $P\ "(2\geq 1\, et\ -1\in\mathbb{N}\ )"$ » est

$\overline{P}\ "(2\prec 1 ou -1\notin\mathbb{N}\ )"$

2)La proposition : $Q\ "\left(\sqrt{3}\geq 2\ ou\ \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\ \right)"$ est vraie

Car $"\sqrt{3}\geq 2\ "$ est fausse et $"\sqrt{2}\notin\mathbb{N}"$ est vraie

La négation de « $Q\ "\left(\sqrt{3}\geq 2\ \ ou\ \ \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\ \right)"$ » est

$\overline{Q}\ "\sqrt{3}\prec 2\ \ et\ \ \sqrt{2}\in\mathbb{N}"$

3)La proposition : $R\ "\forall x\in\mathbb{R}/2x\geq 0"$ est fausse

Car pour x=-1 : elle est fausse

La négation de « $R\ "\forall x\in\mathbb{R}/2x\geq 0"$ » est

$\overline{R}\ "\exists x\in\mathbb{R}/2x\prec 0"$

4)La proposition : $M\ "\exists x\in\mathbb{R}/2x-1=3"$ est vraie

Car pour x=2 : elle est vraie

La négation de « $M\ "\exists x\in\mathbb{R}/2x-1=3"$ » est

$\overline{M}\ "\forall x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 3"$

5)La proposition : $N\ "\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$ est fausse

Car pour n=1 : elle est fausse

La négation de « $N\ "\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$ » est

$\overline{N}\ "\exists n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}"$

Exercice2 : Donner la valeur de vérité De la proposition suivante :

$F\ "\exists!x\in\mathbb{R}/2x^2-1=3"$

Solution : $F\ "\exists!x\in\mathbb{R}/2x^2-1=3"$

Se lit « il existe un unique $x\in\mathbb{R}/2x^2-1=3$ »

$2x^2-1=3\Leftrightarrow 2x^2=4\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ ou\ x=-\sqrt{2}$

(il donc 2 solutions)

Donc : La proposition : $F\ "\exists!x\in\mathbb{R}/2x^2-1=3"$ est fausse

Exercice3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) :

$x^2-|x-2|+5=0$

Solution : soit S l'ensemble des solutions de (1)

Soit $x\in\mathbb{R}$ **:** étudions le signe de : $x-2$

<u>Premier cas :</u> si $x\in[2;+\infty[$ alors $|x-2|=x-2$

Donc l'équation (1) devient :

$x^2-(x-2)+5=0\Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta=1-28=-27\prec 0$ donc : $S_1=\varnothing$

<u>Deuxième cas :</u> si $x\in]-\infty;2[$ alors :

$|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc l'équation (1) devient :

$x^2+(x-2)+5=0\Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta=1-12=-11\prec 0$ Donc $S_2=\varnothing$

Finalement : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

Exercice4 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow$

$xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Donc : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exercice5 : Soient $a \succ 0$ et $b \succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$ Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par a−b on obtient :
a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice6 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x^2+y^2 \geq x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x^2+y^2 \prec x+y$

En posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec 1+\frac{1}{2}$

c a d $\frac{5}{4} \prec \frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie

Donc P est fausse.

Exercice7 : Montrer que La proposition $P:\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right): \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2\right): \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

En posant : $a=4$ et $b=3$ on aura :
$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice8 : Montrer que La proposition $P:\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right): x+\frac{1}{x} \geq 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists x \in \mathbb{R}^*\right): x+\frac{1}{x} \prec 2$

En posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2 \prec 2$ donc

La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice9 : 1) Montrer que :
$\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ Montrer que :
$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Solution : 1)a) $\Rightarrow$:Montrons que $\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Rightarrow a=0$ et $b=0$?

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) et $(a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b \succ 0$ contradiction par suite :
$a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

Donc : $\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1 \geq 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Exercice10 : Montrer par récurrence que : pour tout entier $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$

Solution : Notons P(n) La proposition: « $2^n \geq 6n$ »

1étape : Pour $n=5$: $2^5=32$ et $6\times 5=30$

Donc $2^5 \geq 6\times 5$ Donc : P(5) est vraie.

2étape : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $2^n \geq 6n$

3étapes : Montrons alors que : $2^{n+1} \geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n \geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

Donc : $2^n \times 2 \geq 6n \times 2$ donc $2^{n+1} \geq 12n$ **(1)**

Or on remarque que : $12n \geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6 \geq 0$

Car : $n \geq 5$ donc $6n \geq 30$ donc $6n-6 \geq 24 \geq 0$

On conclut par récurrence que :

Pour tout $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$

Exercice11 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 10^n-1$ est divisible par 9

Solution : Montrons $\exists k \in \mathbb{N} / 10^n-1=9k$

1étapes : Pour n=0 nous avons $10^0-1=1-1=0$ est un multiple de9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : supposons que : $\exists k \in \mathbb{N} / 10^n - 1 = 9k$

3étapes : Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 10^{n+1} - 1 = 9k'$??

$$10^{n+1}-1=10^n\times10-1=10^n\times(9+1)-1=10^n\times9+10^n-1=10^n\times9+9k$$

$$10^{n+1}-1=10^n\times10-1=10^n\times(9+1)-1=10^n\times9+10^n-1=10^n\times9+9k$$

Avec $k'=k+n^2+n+1$

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 10^n - 1$ est divisible par 9

Exercice12 : Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Solution : Montrons $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

1étapes : Pour n=0 nous avons $0^3+2\times0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

3étapes : Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$$

$$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$$

$$=3(k+n^2+n+1)=3k' \quad \text{Avec } k'=k+n^2+n+1$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Exercice13 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Solution : Notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étape : Pour n=1 nous avons

$$1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$$

Donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étape : Supposons que :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2==\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$$

3étapes : Montrons alors que :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6} \text{ ??}$$

On a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$$

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : Pour n=1 nous avons $1^3=\frac{1^2\times(1+1)^2}{4}=1$

Donc $1=1$. Donc : P(0) est vraie.

2étapes : Supposons que :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \text{ ??}$$

On a : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+(n+1)^3$

et on a : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence

donc : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$n\in\mathbb{N}^*$: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Exercice15 : Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : Supposons que :

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

3étapes : Montrons alors que :

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$??

On a :

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(1+3+5+...+(2n+1))+(2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence:

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

Donc :

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+1)^2+(2n+3)$

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

Donc :$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice16 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/7^n-1=6k$

3étapes : Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}/7^{n+1}-1=6k'$??

$7^{n+1}-1=7\times7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times7^n+7^n-1=6\times7^n+6k$

$7^{n+1}-1=6(7^n+k)=6k'$ avec $k'=7^n+k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien