Position relative de deux courbes – Corrigé

Exercice 1

Soit C_1 la parabole d'équation $y = 2x^2 + 4x + 4$ et C_2 la parabole d'équation $y = x^2 - 3x - 6$.

On note f la fonction représentée par la courbe C_1 et g la fonction représentée par la courbe C_2.

a) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x réel.

$f(x) - g(x) = 2x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 3x - 6) = x^2 + 7x + 10$

Étude de $x^2 + 7x + 10$

$\Delta = (7)^2 - 4 \times 10 = 9$

$\Delta > 0$. Le polynôme $x^2 + 7x + 10$ a donc deux racines

$x_1 = \frac{-7-3}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-7+3}{2} = -2$

$a = 1 > 0$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$x^2 + 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Déduire de la question précédente la position de C_1 par rapport à C_2 .

Si $x \in]-\infty; -5]$ ou $x \in [-2; +\infty[$ alors $x^2 + 7x + 10 \geq 0$, c'est-à-dire que $f(x) \geq g(x)$.

On en déduit que C_1 est au dessus de C_2.

Si $x \in [-5; -2]$ alors $x^2 + 7x + 10 \leq 0$, c'est-à-dire que $f(x) \leq g(x)$. On en déduit que C_1 est en dessous de C_2.

c) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice (représentation de C_1 et C_2)

Exercice 2

Soit les fonctions f_1 *et* f_2, définies sur $\mathbb{R}$ par:

$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ et $f_2(x) = x^2 - 2x - 3$.

On note P_1 et P_2 les courbes respectives de f_1 *et* f_2 dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Résoudre par le calcul l'inéquation $f_1(x) \leq 0$

Etude de $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

$\Delta = 1 - 4\left(\frac{-1}{2} \times \frac{3}{2}\right) = 4 > 0$

Donc $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ a deux racines $x_1=\frac{-1-2}{-1}=3$ et $x_2=\frac{-1+2}{-1}=-1$

$a=-\frac{1}{2}<0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f_1(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$

b) Résoudre par le calcul l'inéquation $f_2(x)>0$

Etude de x^2-2x-3

$\Delta=(-2)^2-4\times(-3)=16>0$

Donc x^2-2x-3 a deux racines $x_1=\frac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\frac{2+4}{2}=3$

$a=1>0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f_2(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$

2) a) Résoudre par le calcul l'équation $f_1(x)=f_2(x)$

$f_1(x)=f_2(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=x^2-2x-3\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}=0$

Détermination des racines de $\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$

$\Delta=(-3)^2-4\times\left(-\frac{9}{2}\times\frac{3}{2}\right)=36>0$

L'équation $\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}=0$ a donc deux solutions $x_1=\frac{3-6}{3}=-1$ et $x_2=\frac{3+6}{3}=3$.

$f_1(x)=f_2(x)\Leftrightarrow x_1=-1$ et $x_2=3$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P_1 et P_2

$(-1)^2-2(-1)-3=0$ et $(3)^3-2(3)-3=0$

$A_1(-1;0)$ et $A_2(3;0)$ sont les deux points d'intersection de P_1 et P_2.

3) a) Déterminer le signe de $f_1(x)-f_2(x)$ suivant les valeurs de x.

$f_1(x)-f_2(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}$

$a=-\frac{3}{2}<0$. D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) En déduire la position relative des courbes P_1 *et* P_2

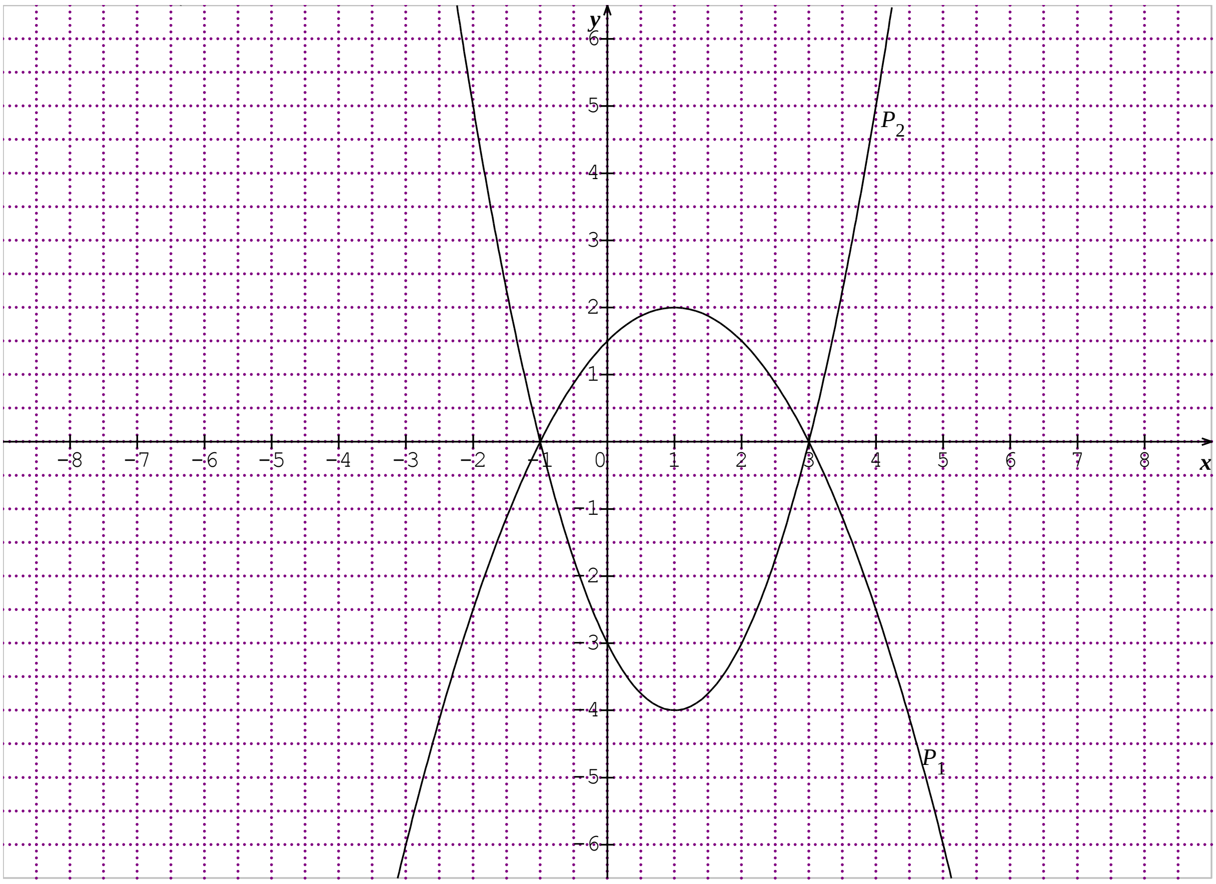
Si $x \in [-1;3]$ alors $\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} \geq 0$, c'est-à-dire que $f_1(x) \geq f_2(x)$.

On en déduit que P_1 est au dessus de P_2.

Si $x \in]-\infty;-1]$ ou $x \in [3;+\infty[$ alors $\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} \leq 0$, c'est-à-dire que $f_1(x) \leq f_2(x)$. On en déduit que P_1 est en dessous de P_2.

4) On donne ci-dessous la représentation graphique de P_1 et P_2

Vérifier les résultats trouvés aux questions 1, 2 et 3.



Question 1

P_1 est au dessus de l'axe des abscisses entre -1 et 3.

Question 2

Point d'intersections $P_1(-1;0)$ et $P_2(3;0)$

Question 3

Si $x \in [-1;3]$ alors P_1 est au dessus de P_2.

Exercice 3

Soit les fonctions f_1 *et* f_2, définies sur $\mathbb{R}$ par:

$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$ et $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$.

On note P_1 et P_2 les courbes respectives de f_1 *et* f_2 dans le repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) a) Résoudre par le calcul l'inéquation $f_1(x) \leq 0$

$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = x(\frac{-1}{2}x + \frac{5}{2})$

Tableau de signes

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f_1(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

$S =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

b) Résoudre par le calcul l'inéquation $f_2(x) > 0$

$f_2(x) = x^2 - 5x + 6$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$

$\Delta > 0$ donc le polynôme a deux racines $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

Tableau de signes $a > 0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f_2(x) > 0 \iff x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

$S =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

2) a) Résoudre par le calcul l'équation $f_1(x) = f_2(x)$

$f_1(x) = f_2(x) \iff -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = x^2 - 5x + 6 \iff \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 6 = 0$

Étude de $\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 6$

$\Delta = (-\frac{15}{4})^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 6 = \frac{81}{4}$

$\Delta > 0$ donc l'équation $\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 6 = 0$ ainsi que l'égalité $f_1(x) = f_2(x)$ ont deux solutions

$x_1 = 1$ *et* $x_2 = 4$ (je ne donne pas le détail des calculs).

$S = \{1; 4\}$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P_1 et P_2

$f_1(1) = -\frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{5}{2} \times 1 = 2$ et $f_2(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 2$.

Donc le point A(1 ;2) est un point d'intersection des courbes représentatives de f_1 *et* f_2.

$f_1(4) = -\frac{1}{2} \times 4^2 + \frac{5}{2} \times 4 = 2$ et $f_2(4) = 4^2 - 5 \times 4 + 6 = 2$.

Donc le point $B(4\,;2)$ est un point d'intersection des courbes représentatives de f_1 *et* f_2.

3) a) Déterminer le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ suivant les valeurs de x.

$f_1(x) - f_2(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - (x^2 - 5x + 6) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 6$

$a = -\frac{3}{2} < 0$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) En déduire la position relative des courbes P_1 *et* P_2

Si $x \in]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[$ alors $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$ donc P_1 est en dessous de P_2

Si $x \in [1; 4]$ alors $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ donc P_1 est au dessus de P_2.

4) Après avoir donné un tableau de valeurs pour chacune des fonctions entre -2 et 6, tracer la représentation graphique de P_1 et P_2 dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.