

TD-PRODUIT SCALAIRE DANS \mathcal{V}_2
Etude analytique -Applications : cercle

Exercice1 : dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -3)$ et $B(3; 7)$ et $C(-3; 1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

Exercice2: dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(5; 0)$ et $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$

- 1) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- 2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0; 1)$ et qui admet $\vec{n}(2; 1)$ comme vecteur normal

Exercice4 : donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) (D): $x - 2y + 5 = 0$

2) (D): $2y - 3 = 0$ 3) (D): $x - 1 = 0$

Exercice5 : dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(-3; 0)$ et $B(3; 0)$ et $C(1; 5)$

- 1) déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C
- 2) déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Exercice6 : dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points $A(1; 2)$

et $B(-2; 3)$ et $C(0; 4)$

- 1) déterminer une équation cartésienne

de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

- 2) déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Exercice7 : (D) $2x + 3y - 1 = 0$ et

(D'): $\frac{3}{2}x - y + 4 = 0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Exercice8 : Soient la droite (D) d'équation :

(D): $3x + 4y + 5 = 0$

- 1) Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)
- 2) calculer La distance du point O à la droite (D)
- 3) Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Exercice9: dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -1)$ et $B(4; -1)$ et $C(-2; 2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

- 3) Calculer la surface du triangle ABC
- 4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A
- 5) déterminer une équation cartésienne

de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $r = 3$

Exercice11 : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$

2) (E): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

3) (E): $x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

Exercice12 : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$

Exercice13 : le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF

Exercice14: résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

Exercice15 : résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

Exercice16 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation

$$(D): x + y + 2 = 0$$

Exercice17 : Etudier la position du cercle (C) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite

$$(D): x - y + 2 = 0$$

Exercice18 : Etudier la position du cercle (C) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 1$ avec la droite

$$(D): y = 3$$

Exercice19 : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

1) Vérifier que $A(0;1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A .

Exercice20 : Déterminer l'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$

avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (C) des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

Exercice22 : le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. (C) l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ du plan tel que : } \begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

1) montrer que (C) est le cercle (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2) soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à

l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations

des deux tangentes au cercle (C) passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle (C) et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4) a) soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4) b) déterminer graphiquement l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ du plan tel que : } \frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$$

Exercice23: le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1) montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant

par A ; B et C

Exercice 24: le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \text{ avec } m \text{ Paramètre réel}$$

1) déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) montrer que $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$ (C_m) est un cercle dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer (C_0) ; (C_2) ; (C_3)

3) a) montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est tangente

A toutes les cercles (C_m)

3) b) soit $m > \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des cercles (C_m) et que

la droite (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

Exercices sans corrections

Exercice1 : Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Considérons la droite $(D): 2x - y + 1 = 0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α .

- 1- Déterminer les coordonnées de N .
- 2- Déterminer la distance ON .
- 3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

Exercice2: Considérons le triangle ABC où $A(2,1)$, $B(5,0)$ et $C(7,6)$

- 1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
- 2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC .
- 3) Déterminer les coordonnées du point H , orthocentre du triangle ABC .
- 4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

Exercice 3: Considérons la parabole d'équation :

$(P): y = x^2$ et la droite $(D): y = x - 1$

- 1- Tracer la droite (D) et la parabole (P) .
- 2- Soit $N\alpha$ un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)
 - a) Déterminer en fonction de α la distance $d(N\alpha, (D))$.
 - b) Pour quelle valeur de α la distance $d(N\alpha, (D))$ est minimale.

Exercice4 : Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls et le trinôme $f(x) = (\vec{xu} + \vec{v})^2$

- 1- Développer $f(x)$.
- 2- Déterminer le signe de $f(x)$.
- 3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.
- 4- en déduire que pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- 5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice5 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls.

- 1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$
- 2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- 3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice 6 : Déterminer les ensembles :

$(\Gamma_1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$

$(\Gamma_2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$

Exercice7 :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5, -2)$

- 1- Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés
- 2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au

Triangle ABC .

Exercice8 : Soit (\mathcal{C}) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

- 1) Vérifier que le point $A(3, -1)$ appartient au cercle
- 2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle (\mathcal{C}) en A .

Exercice9: Soient le cercle

$(\mathcal{C}): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

- 1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de (\mathcal{C})
- 2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.
b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à (\mathcal{C}) .
- 3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta) y = mx + p$ a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au Cercle (\mathcal{C}) .

4- Soit $B(4,5)$

- a) Montrer que la droite passant par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle (\mathcal{C}) .
- b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta') y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (\mathcal{C}) .

Exercice10 : Résoudre graphiquement

$$(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$$

Exercice 11 : Soit l'ensemble :

$$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$$

où m est un réel.

- 1- Montrer que pour tout m dans \mathbb{R} , l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.
- 2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m) .
- 3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit \mathbb{R}
- 4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (C_m)
b) Soit $M_0(x_0; y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$
- 5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

