Marrakech-Safi 2016

(Session Normale)

Exercice 1 : 2points

Ahmed a acheté une moto pour 8000 DH a payé 25% de ce montant et le reste, il paiera sur 12 mois avec une augmentation de 10%

Quel est le montant de chaque mensualité ?

Exercice 2 : 5points (2pt +1pt +2pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2+2x-15=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2+2x-15\leq 0$

3) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

Exercice 3 : 3points (1pt +1pt+1pt)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules vertes.

On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles

2) Combien y a-t-il de possibilités contenant exactement deux boules rouges et une boule verte

3) Combien y a-t-il de possibilités contenant trois boules de mêmes couleurs ?

Exercice 4 : 4points (1pt +1pt+1pt +1pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r=4$ et $u_0=2$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Vérifier que : $u_{20}=82$

3) Calculer en fonction de n la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_n$

4) En déduire la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{20}$

Exercice 5 : 6points (1pt +1pt+0.5pt +1.5pt +0.5pt+1.5pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$ et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

5) a) En déduire les variations de f sur D_f

b) Donner le tableau de variations de f sur D_f

Solution :

Exercice 1 : Ahmed à payer : $P=8000\times\frac{25}{100}=2000DH$

Le reste à payer par mois est : $R=8000-2000=6000DH$

Avec l'augmentation de 10% il il paiera :

$P_1=6000+6000\times\frac{10}{100}=6000+600=6600DH$

Donc le montant de chaque mensualité est : $M=\frac{6600}{12}=550DH$

Exercice 2 : 1) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+2x-15=0$:

a = 1, b =2 et c = -15

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4+60=64$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1=\frac{-2+\sqrt{64}}{2\times1}=\frac{-2+8}{2}=\frac{6}{2}=3$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{64}}{2\times1}=\frac{-2-8}{2}=\frac{-10}{2}=-5$

2) $x^2+2x-15\leq 0$

Les racines sont : $x_1=3$ et $x_2=-5$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x^2+2x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $S=[-5;3]$

3) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x-3y=1 & (1) \\ 2x+3y=0 & (2) \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$(2)+(1)\quad x-3y+2x+3y=1+0$

Équivaut à : $3x=1$

Équivaut à : $x=\frac{1}{3}$ et on remplace dans : $2x+3y=0\ (2)$ équivaut à : $2\times\frac{1}{3}+3y=0$

Équivaut à : $3y=-\frac{2}{3}$ équivaut à : $y=\frac{-\frac{2}{3}}{3}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{1}}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{1}}=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{9}\right)\right\}$

Exercice 3 : 1) Lorsque l'on effectue des tirages simultanés de boules dans une urne, le nombre de résultats possibles est donné par une formule mathématique

appelée combinaison : $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{A_n^p}{p!}$

Dans ce cas, les résultats obtenus ne dépendent pas de l'ordre des boules tirées

Plus mathématiquement, si l'on tire p boules simultanément dans une urne contenante n boules

Il y a : C_n^p tirage possible

Dans l'urne il Ya :7 boules et on tire simultanément 3 boules de cette urne

Donc : $card\,\Omega = C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = \frac{7\times6\times5}{6} = 7\times5 = 35$

Donc : Le nombre de tirages possibles est 35.

2) Tirer deux boules rouges et une boule verte signifie : $C_3^2 \times C_4^1$

et c'est : **x**

Donc : le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges et une boule verte

Est : $C_3^2 \times C_4^1 = 3\times4 = 12$ car $C_3^2 = 3$ et $C_4^1 = 4$

Remarque : $C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$

3) Tirer 3 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 3 boules rouges **OU** tirer 3 boules vertes **OU** c'est : **+**

Le nombre de possibilités est : $C_3^3 + C_4^3$

$C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{4\times3\times2}{3\times2} = 4$ et $C_3^3 = 1$

Donc : Le nombre de possibilités de tirer 3 boules de mêmes couleurs est : $C_3^3 + C_4^3 = 1 + 4 = 5$

Exercice 4 : 1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $r = 4$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 2 + 4n$

2) $u_n = 2 + 4n$ Donc : $u_{20} = 2 + 4\times20 = 2 + 80 = 82$

3) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)\frac{2+2+4n}{2}$$

$$S = (n+1)\frac{4+4n}{2} = (n+1)\frac{4(1+n)}{2} = 2(n+1)(1+n) = 2(n+1)^2$$

4) Déduction de la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$

On a : $S = 2(n+1)^2$ on pose : $n = 20$

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 2(20+1)^2 = 2\times21^2 = 2\times441 = 882$$

Remarque : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_{20}}{2}$

On a : $u_{20} = 82$ et $u_0 = 2$

Donc : $S = 21\frac{2+82}{2} = 21\frac{84}{2} = 21\times42 = 882$

Exercice 5 : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \neq 0\}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$

a) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \frac{x+2}{x-3}$

On a: $\lim\limits_{x\to 3^+} x+2=3+2=5$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x+2=3+2=5$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x+2}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} x+2=3+2=5$ Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

La droite (Δ_1): $x=3$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

La droite (Δ_2): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$; $f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)'=\frac{(x+2)'(x-3)-(x+2)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{1(x-3)-1\times(x+2)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-3-x-2}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}\prec 0$$

5) a) $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-3)^2}\prec 0$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;3[$ et sur $]3;+\infty[$

b) Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty\ \|\ +\infty$	$\searrow$	1