Equations et inéquations du Second degré et etude de fonction du second degré

Définition :
f est une fonction polynôme de degré 2 si :
- ✓ f est définie sur $\mathbb{R}$ et
- ✓ il existe a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de $f(x)$.
On dit fonction polynôme du second degré ou trinôme du second degré .

Savoir-faire 1: Reconnaitre un trinôme du second degré
Exemples :
1. $f: x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$ est un trinôme du second degré avec $a = \cdots, b = \cdots, c = \cdots$
2. $f: x \mapsto x^2 + 3$ est un trinôme du second degré avec $a = \cdots, b = \cdots, c = \cdots$
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-1)(3-x)$. f est-elle une fonction polynôme du second degré ? Justifier.
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2+x}{x}$. f est-elle une fonction polynôme du second degré ? Justifier.
5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(2-x)^2 + 4$. f est-elle une fonction polynôme du second degré ? Justifier.

Contre-exemples :

✂ Tron commun Sciences

I Forme canonique et sens de variation
1. Forme canonique

Propriété:
Soit un trinôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ $\boxed{\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}}$
$a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelée forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Démonstration:

✂……

Savoir-faire 2: Déterminer la forme canonique d'un trinôme du second degré

1ère méthode : On factorise $ax^2 + bx$ par a, puis on utilise que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement du carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

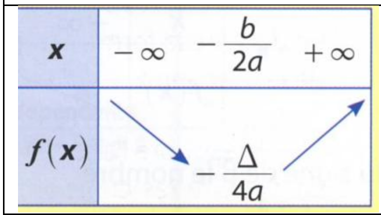
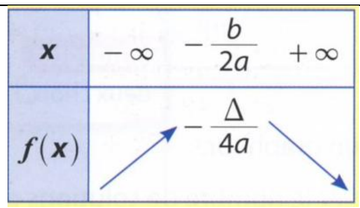
2ème méthode : On calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ en remplaçant les valeurs de a, b, c , puis on applique la formule du cours.

Exemple: Déterminer la forme canonique du trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$

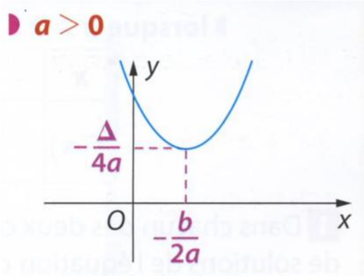
✂……

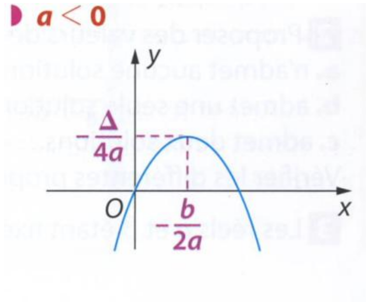
2. Variations et courbe représentative

Propriété (admise): Soit un trinôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$. Le sens de variation de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$	Si $a < 0$
	

La représentation graphique d'un trinôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ est appelée parabole de sommet $S\left(\alpha = -\frac{b}{2a} ; \beta = -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Elle admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$. (Admis)





Savoir-faire 3 : Etudier et exploiter les variations d'un trinôme du second degré

Méthode: On regarde le signe de a pour déterminer le sens de variation du trinôme, puis on peut utiliser la forme canonique du trinôme pour déterminer les valeurs de $\alpha = -\frac{b}{2a}$ *et* $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$, ou bien on peut les calculer en remplaçant les valeurs de a, b, c *et* Δ.

Exemple: Etudier les variations du trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$

✂………

Exercices : 36, 37, 39, 40P95

II Forme factorisée, résolution d'une équation du second degré et signe d'un trinôme

1. Résolution d'une équation du second degré

Propriété: Le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ:

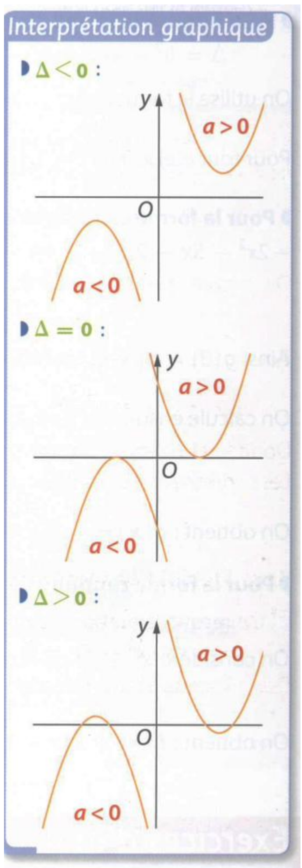
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Graphiquement, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées racines du trinôme $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Démonstration:

✂……………………………………………………………………………………………



Savoir-faire 4 : Résoudre une équation du second degré

Méthode : on se ramène à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, c'est-à-dire à la recherche des racines d'un trinôme. On calcule la valeur du discriminant Δ du trinôme, puis, selon son signe, on applique la formule du cours en calculant le cas échéant les valeurs de $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou de $\frac{b}{2a}$

Exemple: Résoudre les équations du second degré suivantes:

a) $2x^2 - 2x - 3 = 0$

b) $6x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 0$

c) $x^2 + 3x = -1$

d) $2x^2 - 5x = 0$

e) $x^2 + 3 = 0$

✂...

Exercices : 50 à 52P96

Savoir-faire 5 : Déterminer les fonctions polynôme du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts

Exemple :

1. Combien y a-t-il de fonctions polynôme du second degré s'annulant en -1 et 3 ?
2. Déterminer la forme de leurs expressions
3. Déterminer l'expression de LA fonction polynôme du second degré s'annulant en -1 et 3 et vérifiant $f(0) = 4$

2. Propriétés des racines

Propriété : Soit f fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant Δ strictement positif . Alors f a deux racines réelles disctinctes x_1 et x_2, qui vérifient : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Démonstration:

✂...

Savoir-faire 6 : Utiliser les propriétés des racines d'un trinôme

Exemple : Soit f fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = 2x^2 - 14x + 12$.

1. Vérifier que 1 est racine évidente de f.
2. Utiliser les propriétés sur les racines pour déterminer la valeur de l'autre racine de f.

✂...

3. Forme factorisée

Propriété: La factorisation d'un trinôme du second degré dépend du signe du discriminant Δ:

- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)$
- Si $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable

Démonstration:

✂...

Savoir-faire 7: Factoriser, si possible, un trinôme du second degré

Méthode: on calcule la valeur de Δ, puis, selon son signe, on applique la formule du cours en calculant le cas échéant les valeurs de $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou de $-\frac{b}{2a}$.

Exemple: Factoriser, si possible, $2x^2 - 2x - 3$

✂...

4. Signe d'un trinôme du second degré

Propriété: Le signe du trinôme du second degré ax^2+bx+c sur $\mathbb{R}$ dépend des signes de Δ et de a:

- Si $\Delta > 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, on a le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ suivant:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$, donc on obtient le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ suivant:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta < 0$, $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

  Démonstration:

✂..

Savoir-faire 8: Résoudre une inéquation du second degré

Méthode: On se ramène à une inéquation à second membre nul. On calcule la valeur du discriminant Δ, puis, le cas échéant, les valeurs des racines du trinôme. On étudie le signe du trinôme en appliquant le cours. On en déduit l'ensemble des solutions.

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

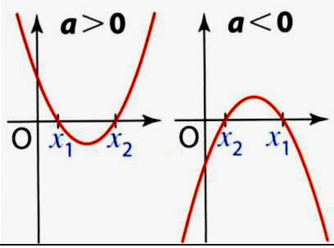
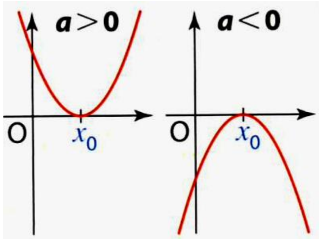
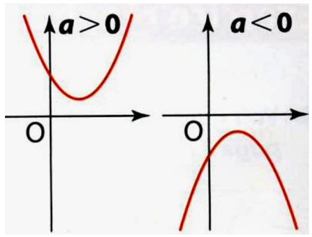
a) $-x^2+x+6 \geq 0$

b) $9x^2-18x > 0$

c) $\frac{1}{3}x^2-2x \leq -3$

✂..

III Tableau récapitulatif

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Forme développée	ax^2+bx+c		
Forme canonique	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$		
Racines	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$.	$x_0=-\frac{b}{2a}$	Pas de racine réelle
Forme factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	Pas de factorisation
Signe	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: **signe de a** 0 **signe de $-a$** 0 **signe de a**	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: **signe de a** 0 **signe de a**	x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: **signe de a**
Courbe			

III Tableau récapitulatif

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Forme développée	ax^2+bx+c		
Forme canonique	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$		
Racines	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$.	$x_0=-\frac{b}{2a}$	Pas de racine réelle
Forme factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	Pas de factorisation
Signe	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: **signe de a** 0 **signe de $-a$** 0 **signe de a**	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: **signe de a** 0 **signe de a**	x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: **signe de a**
Courbe