

TD : L'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans \mathbb{Z} tous les diviseurs de -8

Exercice2 : 1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Exercice3 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} :$

3 divise $4^n - 1$

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations

suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x \succ y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Exercice9 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} a \wedge (a+1) = 1$

Exercice16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Exercice 17:

1- Montrer que tout diviseur commun de : $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b .

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels : $a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Exercice19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$

Montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $n \wedge (n+1) = 1$ 2) $n \wedge (2n+1) = 1$

3) $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

Exercice22: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Exercice23 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2) en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tel que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0 [10]$

Exercice24 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0 [n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3 [10]$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel :

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel,

$5n^3 + n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7,

alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7

6) Montrer que pour tout entier naturel, le nombre

$n(n^2 + 5)$ est divisible par 6

Exercice26 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les

deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

1) montrer que $x \wedge y = a \wedge b$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$

c) montrer que : $n \equiv 4 [7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Exercice27: Résoudre les équations

suyvantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\overline{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Exercice28 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations

suyvants : $x + \bar{3}y = \bar{1}$

Exercice29 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les

systeme suivants :
$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

Exercice30 : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$

et $m = 8316 \vee 1080$

Exercice31: si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Exercice32: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien