

TD : L'ARITHMETIQUE

Exercice1 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;

1) $(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$, 2) $5n+3 \wedge (2n+1) = 1$
 3) $n+2 \wedge (n^2+2n-1) = 1$

Exercice2 : Montrons que : $360 \wedge 84 = 12$ et déterminer u et v dans \mathbb{Z} tels que :
 $360u + 84v = 12$

Exercice3 : Considérons dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E): $17x + 36y = 1$ et déterminons une solution particulière de (E).

Exercice4 : résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation suivante : (E) $7(x-2) = 3(y+1)$

Exercice5 : déterminer l'entier naturel n

tel que : $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

Exercice6: 1) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

on a : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$

Exercice7 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$
 $(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$

Exercice8 : Considérons l'équation :

(E): $756x - 245y = 14$
 1- Montrer l'équation (E) admet une solution.
 2- Déterminer une solution particulière de (E)
 3- Résoudre l'équation (E)

Exercice9 : déterminer dans \mathbb{N}^2 les couples

$(x; y) / \begin{cases} x+y=48 \\ x \wedge y=4 \end{cases}$ avec $x \leq y$

Exercice10: résoudre dans \mathbb{Z} le système

suisant: $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$

Exercice11: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$

Exercice12: résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation suivante: (E) $5x - 3y = 1$

Exercice13 : Montrons que : $(\forall n \geq 2) : n^5 \equiv n[30]$

Exercice14 :

1) Montrer pour tout entier naturel n , non nul : $n^3 - n$ est divisible par 3.

2) Soit p un nombre premier différent de 2,

démontrer que $N = \sum_{k=0}^{p-2} 2^k$ est divisible par p .

Exercice15 : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p , on a: $a^p \equiv a[p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p \equiv a[p]$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

- Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
- Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n - 1)$ est un multiple de $(x - 1)$
- Démontrer que $a^{561} - a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
- En déduire que pour tout entier naturel a : $a^{561} - a \equiv 0[561]$

Exercice 16: soit p un nombre premier positif et

$a \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge a = 1$ on pose $F_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}$

- verifier que : $F_p(a) \in \mathbb{N}$
- soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \wedge b = 1$
 Démontrer que : $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)[p]$

Exercice17 : soit $n \in \mathbb{Z}$ on pose :

$u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$

- Démontrer que : $u_n \equiv 0[5]$
- Démontrer que : $u_n \equiv 0[7]$
- en déduire que : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

Exercice18 : Considérons dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E): $x^4 + 781 = 3y^4$

- monter que : $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1[5]$ ou $x^4 \equiv 0[5]$
- monter que : $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 + 781 \equiv 2[5]$
 Ou $x^4 + 781 \equiv 1[5]$

3) en déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice19 : soit dans \mathbb{Z}^2 l'équation suivante:

$$(E) : 36x - 25y = 5$$

1) montrer que si $(x; y)$ est une solution de

l'équation (E) alors x est un multiple de 5

2) déterminer une solution particulière de l'équation (E) et résoudre (E)

3) soit $(x; y)$ une solution de l'équation (E)

Et $x \wedge y = d$. Déterminer les valeurs possibles

de d et Déterminer les solutions $(x; y)$ de (E)

tel que $x \wedge y = 1$

Exercice20: on pose $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1) soit $a \in A$ discuter suivant a le nombre de solutions de l'équation : (E) $x^2 = a$ dans A

2) soient p et q deux éléments de A

On considère l'équation : (F) $x^2 - 2px + q = \bar{0}$

Montrer que l'équation : (E) admet une solution

ssi $p^2 - q$ appartient à un ensemble B à déterminer

3) application :

a) résoudre dans A l'équation: $x^4 + 3x^2 + 4 = \bar{0}$ (G)

b) déterminer les nombres entiers naturels b

Tels que : 11 divise $10304(b)$

Exercice21 : On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1$$

1) Soit p un nombre premier quelconque divisant $4m + 3$.

Montrer que p est impair et que :

$$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p \equiv 1 [4]$

3. En utilisant la décomposition de $4m + 3$ en facteurs premiers obtenir une contradiction

Exercice22 : Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a $N = n^{13} - n$ est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

Exercice23 : Soit Le nombre $n = \overline{2987}_{(10)}$

Écrire n dans la base 6 :

Exercice24 : soit $N = \overline{dcba}_{(10)}$ un entier naturel

montrer que : $N \equiv a - b + c - d [11]$

Exercice25 : calculer :

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)}$$

Exercice26: calculer

$$1) \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} \quad 2) \overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$$

Exercice27 : effectuer dans la base 9

$$\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)}$$

Exercice28 : monter que

$$1) x \equiv 0 [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5$$

$$2) x \equiv 0 [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$$

$$3) x \equiv 0 [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [3]$$

$$4) x \equiv 0 [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [9]$$

$$5) x \equiv 0 [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 [11]$$

$$6) x \equiv 0 [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$$

Exercice29 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

$$\text{où } (a_n; b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

Montrer que : $a_n \wedge b_n = 1$

Exercice30 : 1) Montrer que $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \quad \text{et} \quad (n+1) C_{2n}^{n-1} = n C_{2n}^n$$

2) Montrer que $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k \wedge n = 1 \Rightarrow \frac{n}{C_n^k}$$

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n+1 \mid C_{2n}^n$

Exercice 31 : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$

(Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 32 :

$$1) \text{ Montrer que } \forall n \in \mathbb{Z}, \frac{6}{5n^3 + n}$$

$$2) \text{ Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien