Cours et exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

http://www.xriadiat.com

NOMBRES COMPLEXES

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

- 1) Définition d'un nombre complexe.
- **1.1 L'ensemble C** ; définition et vocabulaire: On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb C$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie : 1) $\mathbb R \subset \mathbb C$
- 2) On définit dans l'ensemble $\mathbb C$ deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb R$, l'ensemble des nombres réels.
- 3) L'ensemble $\mathbb C$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$
- 4) Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : z = a + ib où a et b sont des réels
- 5) Le réel a s'appelle la partie réel du nombre complexe z; on écrit : a = Re(z)
- 6) Le réel a s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z; on écrit : $\mathbf{b} = \mathbf{Im}(\mathbf{z})$
- 7) L'écriture : z = a + ib s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z.

Exemples

• Les nombres –1 ; 0 ; 3/4 ; $\sqrt{2}$ sont des nombres

réels donc ce sont aussi des éléments de $\ensuremath{\mathbb{C}}$.

- À l'aide du nombre i et de la multiplication : -i ; 2i ; $i\sqrt{2}$... sont aussi dans $\mathbb C$.
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi

dans $\mathbb{C}: -1+i$; $\sqrt{2}+2i$

THÉORÈME: Soient z = x + iy et z' = x' + iy'

 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

PREUVE:

Soient z = x + iy et z' = x' + iy' deux complexes tels

que z = z'

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x - x' = i(y' - y)$$

Raisonnons par l'absurde : si $y' - y \neq 0$ alors

$$i = \frac{x - x'}{y' - y}$$
 étant un réel, on aboutit à une

contradiction. Donc : y' = y et on déduit alors

$$x-x'=0$$
 donc: $x=x'$

La réciproque est claire.

Remarque: z = x + iy et $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

1)
$$x + iy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
 2) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$

1.3 Remarque:

- 1) L'ensemble \mathbb{R} est totalement ordonné, c'est-àdire : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \le y \ ou \ y \le x)$
- 2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

1.4 Des sous-ensembles de C

- 1) L'ensemble $\mathbb R$ l'ensemble des nombres réels est une partie de $\mathbb C$; $(\forall x \in \mathbb R)(x = x + 0i)$
- $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$
- 2) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de \mathbb{C} , s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $i\mathbb{R} = \{iy/y \in \mathbb{R}\}\$ $z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0$
- $3) \mathbb{R} \cup i \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \cap i \mathbb{R} = \{0\}$

(⊊ veut dire strictement inclus strictement :

 $|2+3i \notin \mathbb{R} \ et \ 2+3i \notin i\mathbb{R} \)$

II) LES OPERATIONS DANS C.

1) L'addition dans C.

1.1 Définition

Définition: Soient z = a + ib et z' = a' + ib' deux nombres complexes.

La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté z + z' définie par :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

On en déduit que : Re(z + z') = Re(z) + Re(z') et

http://www.xriadiat.com

Im(z + z') = Im(z) + Im(z')

1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble $\mathbb C$ est :

- 1) Associative :($\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$)
- $((z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3))$
- 2) Commutative : $(\forall (z, z' \in \mathbb{C}^2)(z + z' = z' + z)$
- 3) 0 est l'élément neutre pour l'addition dans \mathbb{C} : $(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$
- 4) Chaque élément z dans \mathbb{C} a un symétrique appelé l'opposé de z noté (-z); z + (-z) = (-z) + z = 0On dit que \mathbb{C} muni de l'addition est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}, +)$

1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : z = a + ib et z' = a' + ib' La différence de z et z' est la somme de z avec le symétrique de z' c'est-à-dire : z + (-z') qu'on la note : z - z'

$$z-z'=(a-a')+i(b-b')$$

2) La multiplication dans C.

2.1 Définition :

Comme la multiplication dans $\mathbb C$ prolonge celle dans $\mathbb R$ on peut définir la multiplication dans $\mathbb C$ par :Soient z = a + ib et z' = a' + ib' deux nombres complexes.

Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + bb'i^2$$

 $i^2 = -1$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

2.2 Propriétés :

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb C$ est :

- 1) Associative :($\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$)
- $((z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3))$
- 2) Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$
- 3) 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans \mathbb{C} : $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$
- 4) Chaque élément non nul z dans C a un

symétrique appelé l'inverse de z noté : $(\frac{1}{z}$ ou $z^{-1})$

Et on a
$$z \times \frac{1}{z} = 1$$

On dit que \mathbb{C}^* muni de la multiplication est un groupe commutatif, on le note par : (\mathbb{C}^*,\times)

En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb C$ il y a une propriété commune entre les deux opérations :

5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb C$:

$$(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3) \ (z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3)$$

Définition: Puisque $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif et (\mathbb{C}^*, \times) est un groupe commutatif et la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans \mathbb{C} ; on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.3 Le quotient de deux complexes.

Soient z = a + ib et z' = a' + ib' deux nombres complexes où $z' \neq 0$ le quotient des nombres z et z' est le produit de z et de l'inverse de z' et se note

$$\frac{z}{z'}$$
 ou $z(z'^{-1})$

2.3 Règles de calculs dans C

 $(\mathbb{C},+,\times)$ étant un corps commutatif ; toutes les règles de calculs qu'on a connu dans \mathbb{R} sont vraies dans \mathbb{C} .

- 1) $zz'=0 \Leftrightarrow z=0$ ou z'=0
- 2) $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}*)(z^n = z \times z \times ... \times z)$ n fois
- 3) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$
- $4) z^{n+m} = z^n \times z^m$
- 5) $z^{n-m} = z^n / z^m$
- $6) \left(z^n\right)^m = z^{n \times m}$
- 7) $z^{n} z_{1}^{n} = (z z_{1})(z^{n-1} + z^{n-2}z_{1} + ... + z^{1}z_{1}^{n-2} + z_{1}^{n-1})$
- 8) Si $z \ne 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + ... + z^n = \frac{1 z^{n+1}}{1 z}$

somme des termes d'une suite géométrique

9)
$$(z+z_1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z_1^{n-k}$$
 formule de binôme

Application : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_{1} = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^{2}$$

$$z_{2} = (1+i\sqrt{3})^{3}$$

$$z_{3} = \frac{1-3i}{3-i}$$

$$z_{4} = \frac{1+i}{3-2i}$$

$$z_{5} = (1+i)^{10}$$

Solution:1)

$$z_1 = -6 + 5i = a + bi$$
 donc $Re(z_1) = -6$ et $Im(z_1) = 5$

2)
$$z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

$$car Im(z_2) = 0$$

3)
$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$$
 donc $\text{Re}(z_1) = \frac{3}{5}\text{et Im}(z_1) = -\frac{4}{5}$

4)
$$z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

5)
$$z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i \times 1 + i^2)^5 = (2i)^5$$

$$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i$$

est un imaginaire pur car $Re(z_5) = 0$

REMARQUES:

Lorsque Im(z) = 0, z = a est réel.

Lorsque Re(z) = 0, z = ib est appelé imaginaire pur.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1)L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe

Le plans (\mathcal{P}) est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\mathcal{O};\vec{u};\vec{v}\right)$; et soit \mathcal{V}_2 le plan vectoriel associé à (\mathcal{P}) . Soit z=a+ib un nombre complexe le couple (a,b) est associé à un point unique M dans le plan (\mathcal{P}) . L'application : $\mathbb{C} \to (\mathcal{P})$

$$z \mapsto M(a, b)$$

où a = Re(z) et b = Im(z) est une bijection

- 1) Le point M s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan (\mathcal{P}) , et l'application
- 2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point M on écrit : z = aff(M) et on écrit : $z_M = a + ib$
- 3) L'application : $\mathbb{C} \to \mathcal{V}_2$

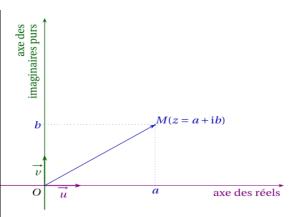
$$z \mapsto \vec{u} \ (a;b)$$

où a = Re(z) et b = Im(z) est une bijection

- 4) Le vecteur $\overset{\circ}{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan (\mathcal{P})
- 5) Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur \vec{u} on

écrit :
$$z = aff(\vec{u})$$
 on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$

- 6) Le plan (\mathcal{P}) s'appelle un plan complexe
- 7) a)L'axe (0,u)s'appelle l'axe des réels
- b) L'axe $(O; \vec{v})$ s'appelle l'axe des imaginaires Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$

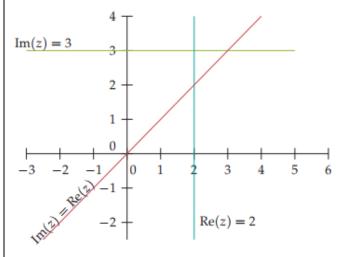


REMARQUES:

- Les complexes z = a ∈ R sont des nombres réels et sont représentés sur sur l'axe des Réels.
- 2)Les complexes z = ib, b ∈ R sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.
- 3)Le plan est alors appelé plan complexe.

Exemple1 : Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- Re(z) = 2
- Im(z) = 3
- Re(z) = Im(z).



2) Les opérations sur les affixes.

Propriété: Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans \mathcal{V}_2 ; M et N deux points dans le plan (\mathcal{P}) et α un réel; On a :

1)
$$aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$$

et
$$aff(u) = aff(v) \iff u = v$$

2)
$$aff(u + v) = aff(u) + aff(v)$$

3)
$$aff(\alpha u) = \alpha \times aff(u)$$

4)
$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$$

Propriété:

1) Soient [AB] un segment de milieu I; on a:

http://www.xriadiat.com

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

2) Si $G = Bar\{(A_k, \alpha_k)\} \le k \le n$ et $z_k = aff(A_k)$

alors:
$$z_G = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} \alpha_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} \alpha_k}$$

3) Cas particuliers 2 points pondérés :

$$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$$
 on a $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

4)Cas particuliers 3 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a:

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes 2 $aff(\overline{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

respectifs: z_A , z_B et z_C

On sait que :

 $A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB})$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A))$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha \right) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Propriété: Soient A, B et C trois points distincts du

plan d'affixes respectifs z_A , z_B et z_C

les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Exemple1: soient dans le plan complexe les

points:
$$A(1+i)$$
 et $B(\frac{1}{2}+2i)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + 2i - i}{-1 - i - i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-1 - 2i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-2\left(\frac{1}{2} + i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exemple2: soient dans le plan complexe les

points:
$$A(2,-3)$$
 et $B(1,1)$ et $C(1,2)$

1)Determiner les affixes des points A et B et C?

- 2)Determiner l'affixe du vecteur AB
- 3) Déterminer l'affixe de *I*, milieu de [*AB*].
- 4)Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- 5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$
- 6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Solutions:1) l'affixe du point A est $z_A = 2 - 3i$

l'affixe du point B est $z_B = 1 + i$

l'affixe du point C est $z_c = 1 + 2i$

2)
$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$$

$$z_{\overline{AB}} = (1+i)-(2-3i) = -1+4i$$

3)
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - 3i + 1 + i}{2} = \frac{3 - 2i}{2} = \frac{3}{2} - i$$

4)
$$\frac{z_C - z_A}{z_R - z_A} = \frac{(1+2i) - (2-3i)}{(1+i) - (2-3i)} = \frac{-1+5i}{-1+4i}$$

$$= \frac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)} = \frac{1+4i-5i+20}{(-1)^2-(4i)^2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21 - i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$?

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2 - 1 + 3}$$

$$z_G = \frac{2(2-3i)-1(1+i)+3(1+2i)}{2-1+3} = \frac{6-i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

6) ABCD est un parallélogramme si et seulement

Si
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
 c'est-à-dire : $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_{\scriptscriptstyle D} = 1 + 2i + 2 - 3i - 1 - i = 2 - 2i$$

Exercice 1:

soient dans le plan complexe les points :

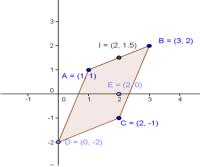
A; B; C; D; E d'affixes respectivement:

$$z_A = 1 + i$$
 et $z_B = 3 + 2i$ et $z_C = 2 - i$ et $z_D = -2i$ et

$$z_F = 2$$

- 1)Représenter ces points dans le plan complexe
- 2) Déterminer l'affixe de I milieu de [AB].
- 3)Determiner l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}
- 4)montrer que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme

Solution: 1)



I milieu de [AB]. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$

Donc:
$$z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$$
 donc: $z_I = \frac{3 + 2i + 1 + i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$

Donc: $I\left(2;\frac{3}{2}\right)$

3)
$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1+i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$$

4)il suffit de monter que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On a: $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + i$

$$z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$$

Donc: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ par suite: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

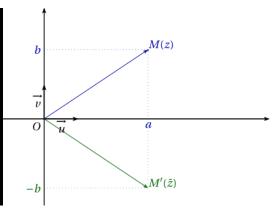
IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition : Soit le nombre complexe z = a + ib (a et b sont des réels) ; le nombre complexe

qu'on note \bar{z} et qui est égale à $\bar{z} = a - ib$

S'appelle le conjugué du nombre complexe z

Si z est l'affixe de M, \bar{z} est l'affixe de M' du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



Exemple :1) z = 2+3i son conjugué est $\overline{z} = 2-3i$

- 2) z=3i+6 son conjugué est z=-3i+6
- 3) $z = 3 \sqrt{6}$ son conjugué est $\overline{z} = 3 \sqrt{6}$

4)
$$\overline{-7} = -7: \overline{2i} = -2i: \overline{-5-3i} = -5+3i: \overline{3+2i} = 3-2i$$

Propriété : (Règles de calculs) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

1) si
$$z = x + iy$$
 alors $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$

$$|z| = z$$
 3) $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ 4) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

5)
$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$
 6) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$

7)
$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$
 8) $\overline{z\times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

9)
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}$$
 10) $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{\frac{z'}{z}}$ si $z \neq 0$

11)
$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \ n \in \mathbb{Z}$$

12)
$$\overline{z} = \lambda \overline{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

PREUVE:

• On prouve la 8)

On écrit les complexes z et z' sous forme

algébrique : z = a + bi avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Et z' = a' + b'i avec $a' \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R}$

On a alors: $\overline{z \times z'} = \overline{(a+bi)(a'+b'i)}$

$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' + ab'i + ba'i - bb'} = \overline{\left(aa' - bb'\right) + \left(ab' + ba'\right)i}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' + ab'i + ba'i - bb'} = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$$

D'autre part :

$$\overline{z} \times \overline{z'} = \overline{a + bi} \times \overline{a' + b'i} = (a - bi) \times (a' - ib')$$

$$\overline{z} \times \overline{z'} = aa' - iab' - a'bi - bb' = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$$

Ce qui donne bien l'égalité cherchée.

• On prouve la 9)

On a:
$$z \times \frac{1}{z} = 1$$
 donc: $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1}$ donc $\overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$

Donc:
$$\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$$
 cqfd

• On prouve la 10)

On a:
$$\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$$
 donc $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(z' \times \frac{1}{z}\right)}$

donc
$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z'} \times \frac{1}{z} = \overline{z'} \times \frac{1}{z} = \overline{\frac{z'}{z}}$$

• L'égalité 11) se démontre par récurrence si $n \in \mathbb{N}$

En effet : n=0 on a $\overline{(z^0)} = (\overline{z})^0$ car $\overline{1} = 1$

Supposons que $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Montrons que : $\overline{(z^{n+1})} = (\overline{z})^{n+1}$?

$$\overline{\left(z^{n+1}\right)} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^{n+1}$$

Donc: $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \forall n \in \mathbb{N}$

Si n est négatif alors $m = -n \in \mathbb{N}$

Donc:

$$\overline{\left(z^{n}\right)} = \overline{\left(z^{-m}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z^{m}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{m}}} = \frac{1}{\left(\overline{z}\right)^{m}} = \left(\overline{z}\right)^{-m} = \left(\overline{z}\right)^{n}$$

Donc: $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \forall n \in \mathbb{Z}$

Exemple1: Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est

un nombre réel.

Solution :On a :

$$\overline{S} = \overline{(1+i)^5 + (1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5}$$

$$\overline{S} = (1-i)^5 + (1+i)^5 = S$$

S est donc bien un nombre réel.

Exemple2: on pose: $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S = j^{2n} - j^n$ $n \in \mathbb{Z}$

1)montrer que : $j^2 = \overline{j}$

2)Démontrer que : $S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Solution:1)

$$j^{2} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} - 2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

2)il suffit de montrer que : $S + \overline{S} = 0$

$$S + \overline{S} = j^{2n} - j^n + \overline{j^{2n} - j^n} = (j^2)^n - j^n + \overline{(j^2)^n - j^n}$$

$$S + \overline{S} = \left(\overline{j}\right)^n - j^n + \overline{\left(\overline{j}^2\right)^n} - \overline{j}^n = \left(\overline{j}\right)^n - j^n + \overline{\left(\overline{j}\right)^n} - \overline{j}^n$$

$$S + \overline{S} = \overline{j}^{n} - j^{n} + j^{n} - \overline{j}^{n} = 0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exemple3: soit $u \in \mathbb{C}$ tell que $u \notin \mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) |1 + uz| = |1 + \overline{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Solution :1) soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\left|1 + uz\right| = \left|1 + \overline{u} \cdot z\right|$$

Donc:
$$|1 + uz|^2 = |1 + \overline{u} \cdot z|^2$$

Donc:
$$(1+uz)\overline{(1+uz)} = (1+\overline{u}\cdot z)\overline{(1+\overline{u}\cdot z)}$$

Donc:
$$(1+uz)(1+\overline{uz}) = (1+\overline{u}\cdot z)(1+u\cdot\overline{z})$$
 Car: $u=u$

Donc:
$$1+uz+uz+uuzz = 1+uz+uz+uuzz$$

Donc: uz + uz = uz + uz

Donc:
$$(u-\overline{u})z+(\overline{u}-u)\overline{z}=0$$

Donc:
$$(u-\overline{u})(z-\overline{z})=0$$

Et puisque : $u - u \neq 0$ car $u \notin \mathbb{R}$

Donc: $z - \overline{z} = 0$ Donc: $z = \overline{z}$

Donc: $z \in \mathbb{R}$

Exercice 2: $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de \bar{z} le conjugué des nombres complexes suivants:

1)
$$Z_1 = (2+i)(5-i)$$

2)
$$Z_2 = 2z + 5i$$

1)
$$Z_1 = (2+i)(5-i)$$
 2) $Z_2 = 2z + 5i$ 3) $Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$

Solution:

1)
$$\overline{Z_1} = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$$

2)
$$\overline{Z_2} = \overline{2z + 5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\overline{z} - 5i$$

3)
$$\overline{Z_3} = \left(\frac{\overline{z-1}}{-3z+i}\right) = \frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}} = \frac{\overline{z-1}}{-3\overline{z}-i}$$

Exercice 3: Résoudre dans C les équations suivantes:

1)
$$2z + i\overline{z} = 5 - 4i$$

2)
$$z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

Solution :1) $z \in \mathbb{C}$

donc: $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$$2z + i\overline{z} = 5 - 4i \Leftrightarrow 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i$$

$$(2x+y)+i(2y+x)=5-4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5\\ 2y+x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y=5\\ -4y-2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5\\ -4y-2x+2x+y=8+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5\\ -3y=13 \Leftrightarrow y=-\frac{13}{3} \end{cases}$$

Donc: $x = \frac{14}{3}$ par suite: $z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$

Donc: $S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$

2) $z \in \mathbb{C}$ donc: $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$$z = 2\overline{z} - 2 + 6i \iff x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$$

Donc: $S = \{2 + 2i\}$

Exercice4 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre

complexe
$$z$$
 et on pose : $U = (z-2i)(\overline{z}-1)$

Et z = x + yi avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M(z) du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points M(z)

tels que : U est imaginaire pur

Solution :1) z = x + yi avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc:
$$U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$$

Donc:
$$U = (x+i(y-2))((x-1)-yi)$$

Donc:
$$U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$$

Donc:
$$Re(U) = x^2 + y^2 - x - 2y$$
 et $Im(U) = -y - 2x + 2$

2)
$$U$$
 est réel ssi $Im(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta): -y - 2x + 2 = 0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points M(z) du plan tels

que : U est réel est la droite d'équation :

$$(\Delta): -y - 2x + 2 = 0$$

3) U est imaginaire pur ssi Re(U) = 0

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 1y + 1^2 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

l'ensemble (C)des points M(z) tels que : U est

imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$

et de rayon : $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Exercice5:

A) Résoudre dans C les équations suivantes :

1)
$$2z - 3\overline{z} + 1 + 2i = 0$$

1)
$$2z - 3z + 1 + 2i = 0$$
 2) $z + (1-i)z + 3 - 2i = 0$

3)
$$(3+i)z+\bar{z}=-i$$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) (E1) =
$$\{M(z) / \frac{z - 2i}{z + i} \in \mathbb{R}\}$$

2) (E2) =
$$\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$$

Exercice6 : Démontrer que :

$$S = \left(\sqrt{3} + i\right)^{2n+1} - \left(i - \sqrt{3}\right)^{2n+1} \text{ est un nombre}$$

réel $\forall n \in \mathbb{Z}$

Solution: On a:

$$\left(i - \sqrt{3}\right)^{2n+1} = \left(-\left(\sqrt{3} - i\right)\right)^{2n+1} = \left(-1\right)^{2n+1} \times \left(\sqrt{3} - i\right)^{2n+1}$$

Donc:
$$(i-\sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3}-i)^{2n+1}$$
 car $(-1)^{2n+1} = -1$

Donc:
$$S = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} + (\sqrt{3} - i)^{2n+1}$$

$$\overline{S} = \overline{\left(\sqrt{3} + i\right)^{2n+1} - \left(i - \sqrt{3}\right)^{2n+1}} = \overline{\left(\sqrt{3} + i\right)^{2n+1} - \left(i - \sqrt{3}\right)^{2n+1}}$$

$$\overline{S} = \left(\overline{\sqrt{3} + i}\right)^{2n+1} - \left(\overline{i - \sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2n+1} + \left(\sqrt{3} + i\right)^{2n+1}$$

Donc:
$$\overline{S} = S$$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice7 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre

complexe z et on pose : $U = 2iz - \overline{z}$

Et
$$z = x + yi$$
 avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M(z) du

plan tels que : U est réel

Solution :1) z = x + yi avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc: U = 2i(x + yi) - (x - yi) = 2ix - 2y - x + yi

Donc: U = (-2y - x) + i(y + 2x)

Prof/ATMANI NAJIB

Donc: Re(U) = -2y - x et Im(U) = y + 2x

2) U est réel ssi $Im(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta): y + 2x = 0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points M(z) du plan tels

que : U est réel est la droite d'équation :

$$(\Delta)$$
: $y = -2x$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE. 1) Définition et applications

Définition: Soit z = x + yi un nombre complexe

avec
$$x \in \mathbb{R}$$
 et $y \in \mathbb{R}$

le réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ 2 s'appelle le module du

nombre complexe z et on le note |z|

Exemple: calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) z' = 3 - 4i

Solution:

$$|z| = \left| \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|z'| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

Propriété: Soit z = x + yi un nombre complexe;

on a
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Preuve : en exercice

Exercice:

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1)
$$z_1 = 3 + \sqrt{3}i$$
 2) $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$ 3) $z_2 = \frac{1}{1+i}$

4)
$$z_4 = x$$
 où $x \in \mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1)
$$u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$$
 2) $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$

C) Déterminer l'ensemble des points M(z)

tels que : A(z) ;B(
$$\frac{1}{z}$$
) et C($\frac{1}{z}$) soit alignés.

2) Règle de calculs

Propriétés: Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans \mathbb{N} on a :

1)
$$|z| = |-z| = |z|$$

1)
$$|z| = |-z| = |z|$$
 2) $|z|^2 = z\overline{z}$ 3)

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1$$

4)
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
 5) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$$5) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

6)
$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$
 et $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$

7)
$$|z^n| = |z|^n$$
 si $z \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$

8)
$$|z+z'| \le |z|+|z'|$$

Exemple : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1 + i\sqrt{3})$

2)
$$z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i)$$
 3) $z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

3)
$$z_3 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^3$$

Solution:

1)
$$|z_1| = \left| -5\left(1 + i\sqrt{3}\right) \right| = \left| -5\right| \left| 1 + i\sqrt{3} \right| = 5\sqrt{1+3} = 10$$

2)
$$|z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

3)
$$|z_3| = \left| \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^3 \right| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right|^3 = \left(\left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right| \right)^3 = \left(\frac{\left| 1 + i\sqrt{3} \right|}{\left| 1 - i \right|} \right)^3$$

$$\left|z_{3}\right| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^{3} = \left(\sqrt{2}\right)^{3} = 2\sqrt{2}$$

2) interpretation geometrique du module :

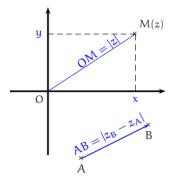
Le plan est rapporté à un repère orthonormé soit *M* l'image du nombre complexe z = x + iy

avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on

a: M(x; y) donc:

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Donc: |z| = OM



Propriété : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B ,

alors:
$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$$

Preuve : soit M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

On a donc: $z_M = z_B - z_A$ avec z_M l'affixe de M

Donc:
$$|z_{B} - z_{A}| = |z_{M}| = OM = AB$$

Exemple1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O; u; v); les points A, B et C

ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral **Solution :** il suffit de montrer que : AC = AB = BC

AB =
$$|z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

Donc: AC = AB = BC

Exemple2: Déterminer l'ensemble (Δ) des points

Md'affixe z tels que : |z-1-2i| = |z-7+2i|

Solution:

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |z-(1+2i)| = |z-(7-2i)|$$

On pose : $A(z_A = 1 + 2i)$ et $B(z_B = 7 - 2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (\(\Delta \)) cherché est la médiatrice du

segment[AB]

Methode1: Méthode algébrique:

 $z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : z = x + yi

$$|z-1-2i| = |z-7+2i| \iff |x+yi-1-2i| = |x+yi-7+2i|$$

$$\Leftrightarrow$$
 $|x-1+i(y-2)| = |x-7+i(y+2)|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

http://www.xriadiat.com

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow$$
 12x-8y-48 = 0 \Leftrightarrow (Δ) : 3x-2y-12 = 0

Exercice 8: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tels que :a) |z-3+i|=5

b)
$$|z-4-5i| = |z+2|$$

Solution:

a) Soit Ale point d'affixe 3-i

$$|z-3+i|=5 \Leftrightarrow AM=5$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.

b) Soient B et C les points d'affixes 4+5i et -2

$$|z-4-5i|=|z+2| \iff BM = CM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [BC]

Exercice9: Déterminer l'ensemble (C) des points

Md'affixe z tels que : |z-2i|=3

Solution:

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z-2i|=3$$
 On pose: $A(z_A=2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

A(0;2) et de rayon : R=3

Methode1 : Méthode algébrique :

 $z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : z = x + yi

$$|z-2i|=3 \Leftrightarrow |x+yi-2i|=3 \Leftrightarrow |x+i(y-2)|=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

A(0;2) et de rayon : R=3

Exercice10: Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|$

Solution:

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z-4i+1\right| \Leftrightarrow \left|i(z-3i)\right| = \left|\frac{1}{i}(z+4+i)\right|$$

$$\Leftrightarrow |z-3i| = |z+4+i| \operatorname{car} |i| = \left|\frac{1}{i}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-3i| = |z-(-4-i)|$$

On pose : $A(z_A = 3i)$ et $B(z_B = -4 - i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

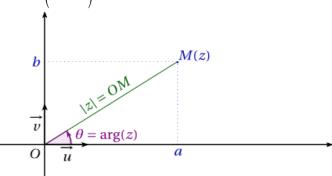
L'ensemble (A) cherché est la médiatrice du

segment[AB]

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

Définition: Le plan complexe est menu d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et M(z) son image. On appelle argument du nombre complexe z une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ On le note par arg(z)



Exemple: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$;

on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A=2$ et $z_B=-2i$ et $z_C=2+2i$ et

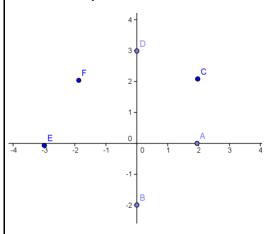
$$z_D = 3i$$
 et $z_E = -3$ et $z_F = -2 + 2i$

- 1)Représenter les points A; B;C;D;E;Fdans Le plan complexe
- 2)on utilisant la représentions déterminer

l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et

 z_D et z_E et z_F

Solution :1)



2)
$$\arg z_A = 0[2\pi]$$
 et $\arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
$$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$
 et $\arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
$$\arg z_E = \pi[2\pi]$$
 et $\arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Remarque : le complexe nul n'a pas d'argument

Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

1)
$$z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi]$$
 2) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$

3)
$$\arg(iy) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$
 si $y > 0$ et $\arg(iy) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ si $y < 0$

4)
$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$$
 5) $\arg z \equiv -\arg z[2\pi]$

Exemple:
$$\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$
 et $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ $\arg(2) \equiv 0 [2\pi]$ et $\arg(-1) \equiv \pi [2\pi]$

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z = a + ib un complexe non nul, on a donc

Prof/ATMANI NAJIB

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$
 et par suite :

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Or : si $arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

alors:
$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
 et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Et finalement : $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$

Propriété: Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i sin\theta)$ Où $arg(z) \equiv \theta$ [2 π]

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul **z**

Exercice11:

Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

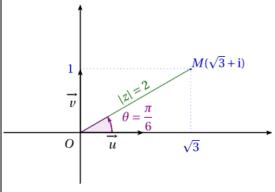
1)
$$z_1 = \sqrt{3} + i$$
 2) $z_2 = 1 - i$ 3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4)
$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$
 5) $z = 7$ 6) $z = -12$

Solution :1)
$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_1 = \sqrt{3} + 1i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$



2)
$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x \text{ donc}$:

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4} \left[2\pi \right] \quad | \mathbf{2}) \quad z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

3)
$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$
 $|z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$z_{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) \\ z_{2} = 2\sin\frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc:

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$
 • Si $\theta \in \left] 0; \pi \left[\text{ alors } : \frac{\theta}{2} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\text{ donc } 2 \sin \frac{\theta}{2} \succ 0 \right]$

4)
$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

 $\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$

Si on a $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r > 0

Alors
$$|z| = r$$
 et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

Exemple: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec

$$\theta \in \left] -\pi; \pi \right[-\{0\}$$

1)
$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$$
 2) $z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$

$$3) \ z_3 = \sin\theta + 2i\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Solution: 1)

$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre

complexe
$$z_1$$
 donc $|z_1|=1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$

2)
$$z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} - i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2} \left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

• Si
$$\theta \in]0; \pi[$$
 alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 est:

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$
 et arg $z = \frac{\theta - \pi}{2}[2\pi]$

• Si
$$\theta \in]-\pi;0[$$
 alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2};0[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2} \left(-\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2\sin\frac{\theta}{2}$$
 et arg $z \equiv \frac{\theta + \pi}{2} [2\pi]$

3)
$$z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$z_3 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

• Si
$$\theta \in]0; \pi[$$
 alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe
$$z_3$$
 est: $z_3 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$$|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$
 et $\arg z = \frac{\theta}{2}[2\pi]$

• Si
$$\theta \in]-\pi;0[$$
 alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2};0[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2\sin\frac{\theta}{2}$$
 et $\arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2}[2\pi]$

3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$ et $arg(z') \equiv \theta' \ [2\pi]$

On donc:

 $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i \sin\theta')$ et par suite :

 $zz' = |z||z'|(cos\theta + i sin\theta)(cos\theta' + i sin\theta')$

= $|z||z'|(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta')$

 $= |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta'))))|$

 $sin\theta \ cos\theta)) = |z||z'|(cos(\theta + \theta') + i \ sin(\theta + \theta'))$

(En utilisant les formules de transformations)

Propriété principale : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

 $arg(z \times z') \equiv arg(z) + arg(z') [2\pi]$

Propriété Règles de calculs pour les arguments : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

- 1) arg $(1/z) \equiv -arg(z) [2\pi]$
- 2) arg $(z/z') \equiv arg(z) arg(z') [2\pi]$
- 3) $arg(z^n) \equiv n arg(z) [2\pi]$

- 4) $arg(-z) \equiv arg(z) + \pi [2\pi]$
- 5) arg $(\overline{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$

Preuves (en exercice)

Notations: Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est : $z = r (cos\theta + i sin\theta)$

c'est-à-dire |z| = r et $arg(z) \equiv \theta$ [2 π]

On écrit : $z = [r, \theta]$

Règles de calculs :

- 1) $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$
- 2)1/ $[r, \theta] = [1/r, -\theta]$
- $3)[r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta \theta']$
- 4) $[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
- 5) $\overline{[r;\theta]} = [r, -\theta]$
- 6) $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

Exemple :on considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i$$
 et $z_2 = 1 - i$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$ et $U = z_1^6 \times z_2^2$

1) Ecrivez les nombres complexe z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Solution :1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Donc:
$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Donc:
$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$$

On a:
$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]^6 \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$U = \left[2^6; -\pi\right] \times \left[2; -\frac{\pi}{2}\right] = \left[2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$U = 2^{7} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right) = 2^{7} \left(0 + 1i \right) = 2^{7} i$$

2)

$$Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{\left(\sqrt{3} - i\right)(1 + i)}{\left(1 - i\right)(1 + i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i - i + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Donc:
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice12: Ecrire le complexe $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8$

Sous sa forme algébrique

Solution :On va d'abord écrire $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc:
$$Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3}\right]^8$$

$$Z = \left[\sqrt{2}^8; \frac{8\pi}{3}\right] = 16\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \frac{6\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi + 2\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Exercice 13 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1)
$$z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
 2) $z = -5 - 5i$ 3) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

4)
$$z = (3-3i)^4$$
 5) $z = -2-2\sqrt{3}i$ 6) $z = \sqrt{6}-i\sqrt{2}$

7)
$$z = (\sqrt{3} + 3i) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$
 8) $z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

9)
$$z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

4) Les formes trigonométriques des racines carrées .

Définition :On appelle racine carrée d'un complexe \mathbf{z} tout complexe u tel que $u^2 = z$

Remarque :Un complexe non nul admet deux racines carrées.

Preuve : d'une propriété :

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul et $u = [\rho, \alpha]$

une racine de z donc $u^2 = z$ ce que se traduit

Propriété: Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r, \theta]$ sont les complexes :

$$u_1 = \left[\sqrt{r}; \frac{\theta}{2}\right]$$
 et $u_2 = \left[\sqrt{r}; \frac{\theta}{2} + \pi\right] = -u_1$

Exemple : Déterminer les racines carrées de

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
 ? On a : $|z| = 1$ et $\arg z = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc les racines carrées de z sont :

$$u_1 = \left[1; \frac{\pi}{12}\right] = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$
 et $u_2 = -u_1$

Exercice14: Soit le complexe:

$$u = \left(\sqrt{3} - 1\right) + i\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

- 1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2
- 2) En déduire la forme trigonométrique de $\it u$

VI) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

1) Angles orientés et argument.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2});$

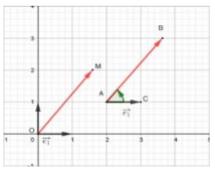
On sait que si le nombre complexe z est non nul alors : $\left(\overline{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \arg z \left[2\pi\right]$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OM}}; \overline{\overrightarrow{OM'}}\right) = \left(\overline{\overrightarrow{OM}}; \overline{e_1}\right) + \left(\overline{e_1}; \overline{\overrightarrow{OM'}}\right) \left[2\pi\right]$$

$$= -\left(\overline{e_1}; \overline{\overrightarrow{OM}}\right) + \left(\overline{e_1}; \overline{\overrightarrow{OM'}}\right) \left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OM}}; \overline{\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \arg z' - \arg z \left[2\pi\right] \equiv \arg \frac{z'}{z} \left[2\pi\right]$$

Soient A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs a et b, on sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ et M aura Pour affixe le complexe (b - a)



Prof/ATMANI NAJIB

Donc:
$$(\overrightarrow{e_i}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)[2\pi]$$

Soient A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b et c, on a :

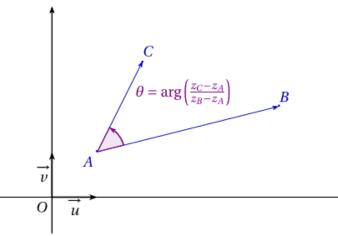
$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{e_1}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AC}}\right) \left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AC}}\right)\left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\arg(b-a) + \arg(c-a)[2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}}; \overline{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg(c-a) - \arg(b-a)[2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$



Soient A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b, c et d

on a :
$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}}; \overline{\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB}}; \overline{\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{AC}}; \overline{\overrightarrow{CD}}\right) [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}}\right) + \pi \left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + \arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right) + \arg\left(-1\right)\left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg - \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \left(\frac{d-c}{a-c}\right) \left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}}; \overline{\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi]$$

Propriété :1) Soient M et M' et A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

1)
$$\left(\overline{\overrightarrow{OM}}; \overline{\overrightarrow{OM'}}\right) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) [2\pi]$$

2)
$$(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)[2\pi]$$

$$3)\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$

4)
$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi]$$

Exemple : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_{\rm A}=3+5i$,

$$z_{\rm B} = 3 - 5i$$
 et $z_{\rm C} = 7 + 3i$

1)montrer que :
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : BC = 2AC

Solution :1)
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \frac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = 2i$$

$$\overline{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)} = \arg\left(\frac{z_B - z_c}{z_A - z_C}\right) [2\pi]$$

$$\overline{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \arg(2i)[2\pi]$$

$$\overline{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc: ABC est un triangle rectangle en C

On a:
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$
 donc: $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = |2i|$

Donc:
$$\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2$$
 donc: $\frac{BC}{AC} = 2$

Donc: BC = 2AC

Exemple15: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs a=2i , $b=\sqrt{2}\left(1+i\right)$ et c=a+b

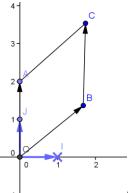
1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que :
$$\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

Solution:

1)On a : c = a + b donc : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Donc OBCA est un parallélogramme



on a :
$$|a-0| = |2i| = 2 = OA$$

$$OB = |b - 0| = |\sqrt{2}(1+i)| = |\sqrt{2}||(1+i)| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

alors: OB = OA

donc OBCA est un losange

2)
$$\arg c = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OC})[2\pi]$$

$$\equiv \left(\overline{i}; \overline{OB}\right) + \left(\overline{\overline{OB}; \overline{OC}}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \left(\overline{i}; \overline{OB}\right) + \frac{1}{2} \left(\overline{OB}; \overline{OA}\right) [2\pi] \text{ (OBCA : losange)}$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} \arg \frac{a}{b} [2\pi]$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} (\arg a - \arg b) [2\pi]$$

Donc:
$$\arg c = \frac{1}{2} (\arg a + \arg b) [2\pi]$$

Or:
$$a = 2i$$
 donc: $\arg a = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Et:
$$b = \sqrt{2}(1+i) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$b = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ donc } \arg b \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc:
$$\arg c = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) [2\pi]$$

Donc:
$$\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

Exercice16: Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs a=2+i,

$$b = 3 + 2i$$
 et $c = 5 - i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Calculer $\tan \alpha$

Solution : On a :
$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

Donc:
$$\alpha = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Donc:
$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{26}}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

Donc:
$$\sqrt{26}\cos\alpha = 1$$
 et $\sqrt{26}\sin\alpha = -5$

Donc:
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$
 et $\sin \alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}}$

Donc:
$$\tan \alpha = -5$$

Exercice17: On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ les

points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ et

$$z_2 = 1 + i$$
 et $z_3 = 1 - i$

- 1) Placer dans le repère \mathcal{R} les points A, B et C
- 2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ et déterminer une mesure de

l'angle
$$\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right)$$

Prof/ATMANI NAJIB

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment [BC] et en déduire que :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme

algébrique puis en déduire cos $(\frac{\pi}{8})$ et sin $(\frac{\pi}{8})$

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire: Trois points A(a), B(b) et C(c) sont alignés si et seulement si : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

Preuve : On sait que :
$$(\overline{\overrightarrow{AB}}; \overline{\overrightarrow{AC}}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$

Et
$$\frac{c-a}{b-a} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
 où $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = r$ et

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}}; \overline{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \theta \left[2\pi\right]$$

A(a), B(b) et C(c) sont alignés si et seulement si

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv k\pi \left[2\pi\right] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = r \text{ ou } \frac{c-a}{b-a} = -r$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

Exercice18:1° Vérifier que les points A(5+3i); B(2+i) et C(-1-i) sont alignés

2° Est ce que les points M(-2+2i), N(2-i) et N(1-i) sont alignés ?

2.2 droites parallèles

Corolaire: A(a), B(b) et C(c) et D(d)

$$(AB) \parallel (CD)$$
 si et seulement si : $arg \left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$

Ou
$$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi \left[2\pi\right]$$

2.3 droites perpendiculaires

Corolaire : A(a), B(b) et C(c) et D(d)

 $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si :

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

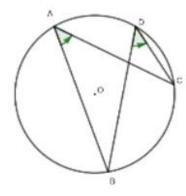
2.4 Cocyclicité de 4 points.

Rappelle : Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC, le point D appartient au cercle (C) si et seulement si :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \left(\overline{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi] \text{ ou } \left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \pi - \left(\overline{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$$

1ier CAS:

$$(\overline{\overrightarrow{AB}}, \overline{\overrightarrow{AC}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{DB}}, \overline{\overrightarrow{DC}})$$
 [2 π]



Ceci se traduit par :

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) - arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right)\right] \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^{*+}$$

2ier CAS:

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overline{DC}, \overline{DB}\right) \quad [2\pi]$$

Ceci se traduit par :

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pi - arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) - \pi \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \times (-1)\right] \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^{*-}$$

Théorème: Soit A(a),B(b), C(c) et D(d) quatre points dans le plan complexe.

Les points A,B,C et D sont cocycliques si et

seulement si : $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

Exercice19 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

 $Z = \frac{5z-2}{z-1}$ Soit un imaginaire pur.

Solution: Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que z≠1 . On note A(1)

 $z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : z = x + yi

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} = \frac{5x - 2 + 5iy}{x - 1 + iy} = \frac{\left(5x - 2 + 5iy\right)\left(x - 1 - iy\right)}{\left(x - 1\right)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{\left(5x^2 - 5x - 2x + 2 + 5y^2\right) + i\left(-5xy + 2y + 5xy - 5y\right)}{\left(x - 1\right)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{\left(5x^2 - 7x + 2 + 5y^2\right) - 3iy}{\left(x - 1\right)^2 + y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2 + 5y^2 - 7x + 2}{\left(x - 1\right)^2 + y^2} = 0\\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 7x + 2 = 0 \\ x \neq 10uy \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{49}{100} + \frac{2}{5} = 0$$

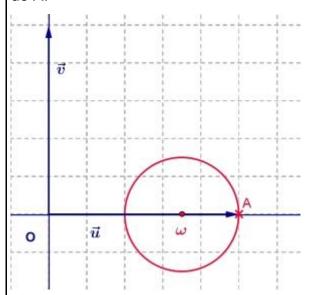
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$$\omega(\frac{7}{10}$$
 +0 i) et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point A(1) appartient à (c).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



Exercices20:

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$que: \left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1$$

Solution:

Première méthode (méthode algébrique)

$$z = x + yi$$
 avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On doit avoir: $z \neq -1 + i$

$$z - 2 = x - 2 + yi$$

$$z + 1 - i = x + 1 + i(y - 1)$$

$$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\left| z-2 \right|}{\left| z+1-i \right|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = |z+1-i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$$y = 3x - 1$$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

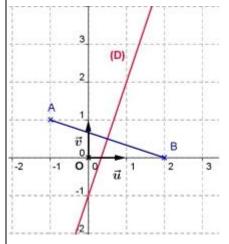
On pose : A(-1+i) et B(2) et M(z)

$$\overrightarrow{AM}(z+1-i)$$
 donc $|z+1-i|=AM$

$$\overrightarrow{BM}(z-2)$$
 donc $|z-2|=BM$

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{\left|z-2\right|}{\left|z+1-i\right|}=1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM}=1 \Leftrightarrow BM=AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice21 :soit a et b et c des nombres

complexes tels que : |a| = |b| = |c| = 1 et $a \neq c$ et

$$b \neq c$$

1)Montrer que :
$$\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

2)en déduire que :
$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Solution:
$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}\right)^2 \times \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$$

On a si :
$$|z|=1$$
 alors : $\overline{z}=\frac{1}{z}$ donc :

$$\left[\frac{c-b}{c-a} \right]^2 \times \frac{a}{b} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)^2 \times \frac{1}{a} = \left(\frac{b-c}{bc} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\mathsf{Donc}: \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

2) puisque :
$$\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$
 alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc:
$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc:
$$2 \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) = -\arg \left(\frac{a}{b} \right) [\pi]$$

$$\operatorname{arg}\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{arg}\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage