

NOMBRES COMPLEXES(Partie 2)

I) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL.

1) Notation et conséquence :

Définition : Soit θ un réel

on pose : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$$

Cette écriture s'appelle la forme exponentielle du complexe non nul z

Exemple : $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$|z| = 2 \quad \text{et} \quad \arg z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Conséquence de la notation :

Tous les résultats qu'on a vus au paravent concernant les modules et les arguments des nombres complexes non nuls

On peut les rapporter en utilisant la notation exponentielle.

Propriété : Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

$$1) \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad 2) \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$3) \quad \frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'} \quad 4) \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$5) \quad \bar{z} = re^{-i\theta} \quad 6) \quad -z = re^{i(\pi+\theta)}$$

Exemples : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$1) \quad z_1 = 2 + 2i \quad 2) \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad 3) \quad z_1 \times z_2$$

$$4) \quad \frac{z_1}{z_2} \quad 5) \quad (z_2)^{12}$$

Solution : 1) $z_1 = 2 + 2i \quad |z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Donc : } z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$2) \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Donc : } z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$\text{Donc : } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$3) \quad z_1 \times z_2$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$4) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4} - (-i\frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$5) \quad (z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$$

2) Formule de Moivre

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$$(re^{i\theta})^n = (r)^n re^{in\theta}$$

d'où : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Applications : en utilisant la Formule de Moivre

$$1) \text{montrer que : } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{Et que : } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{montrer que : } \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$

Solutions : 1) d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Et on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

$$\text{Donc : } \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\text{Donc : } \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \text{ et } \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

2) d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2 i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

Donc :

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\text{Donc : } \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$\text{Et : } \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$$

Donc :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\text{Et } \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

3)montrons que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$?

3) d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4(\cos\theta)^3 i\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$-4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$$

$$\text{Donc : } \cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

$$\text{Et } \sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$$

Donc :

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos^2\theta)^2$$

Finalement on a donc :

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

$$\text{Et que : } \sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$$

3) Formule d'Euler : Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

un nombre complexe non nul et son conjugué

$$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \text{ en faisant la somme}$$

$$\text{membre à membre on obtient : } \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

puis en faisant la différence membre à membre

$$\text{on obtient : } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Applications :

Exemple 1: Linéariser : $\cos^4 x$

On a :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$$

$$\text{Donc : } \cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{4i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 6 + 3e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 3(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6)$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

triangle de Pascal

$$= \frac{1}{16}(2 \cos 4\theta + 3 \times 2 \cos 2\theta + 6)$$

Car $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2 \cos n\theta$

Donc : $\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 3 \cos 2\theta + 3)$

Donc : $\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{3}{8} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

Exemple2:

1) Montrer que $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2) on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Solution :1) à vérifier

2)a) $u + v = 3e^{i\frac{\pi}{5}} + 3e^{i\frac{\pi}{7}} = 3 \left(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{7}} \right)$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{14}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{14}\right)} \right)$$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)} \right)$$

$u + v = 6 \cos\left(\frac{\pi}{35}\right) e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}$ et puisque

$6 \cos\left(\frac{\pi}{35}\right) > 0$ alors : $|u + v| = 6 \cos\left(\frac{\pi}{35}\right)$

Et $\arg(u + v) \equiv \frac{6\pi}{35} [2\pi]$

b) $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right)^2$

$$u_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2 \cos n\theta$

alors : $u_1 = \sqrt{3} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad |u_1| = \sqrt{3}$

Et $\arg(u_1) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

c) $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right)^2$

$$u_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) = -2i \sin \frac{\pi}{6} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \sin n\theta$

alors : $u_2 = -i \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad |u_2| = 1$

Et $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} [2\pi]$ donc : $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

Et $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} [2\pi]$ donc : $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

Exercice1 :1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$

3) Montrer que : $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5 \theta$ b) $\cos^2 \theta \sin^3 \theta$

Solution :1) On a : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 (e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} e^{-i\theta} + e^{-2i\theta})$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2) = \frac{1}{4} (2 \cos 2\theta + 2) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

2) $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$?

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} (e^{i\theta^3} + 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta})$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} ((e^{i\theta^3} + e^{-i3\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ donc :

$$= \frac{1}{8} (2\cos 3\theta + 3 \times 2\cos \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

$$3) \sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta ?$$

$$\text{On a : } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Donc :

$$\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} ((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3)$$

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{8i} (e^{i\theta^3} - 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta})$$

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{8i} ((e^{i\theta^3} - e^{-i3\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))$$

Et on a : $2i \sin n\theta = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$ donc :

$$= -\frac{1}{8i} (2i \sin 3\theta - 3 \times 2i \sin \theta) = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

$$4) \sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} ?$$

$$\text{On a : } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} ((e^{i\theta})^4 - 4(e^{i\theta})^3 \cdot e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^2 \cdot (e^{-i\theta})^2 - 4(e^{i\theta})^1 (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{3i\theta} \cdot e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} \cdot e^{-2i\theta} - 4e^{i\theta} \cdot e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (-4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6 + (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}))$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ donc :

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (-4 \times 2\cos 2\theta + 6 + 2\cos 4\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} (-4\cos 2\theta + 3 + \cos 4\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

5)a) On a :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 106a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$\text{Donc : } \sin^5 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{2i} \right)^5 (e^{5i\theta} - 5e^{4i\theta} e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta} e^{-2i\theta} - 10e^{2i\theta} e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta} e^{-4i\theta} - e^{-5i\theta})$$

$$= -\frac{1}{32i} (e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta})$$

$$= -\frac{1}{32i} (e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - 5(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))$$

$$= -\frac{1}{16} (\sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta)$$

Car $e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \sin n\theta$

$$\text{Donc : } \sin^5 x = -\frac{1}{16} \sin 5\theta + \frac{5}{16} \sin 3\theta - \frac{5}{8} \sin \theta$$

$$5)b) \cos^2 \theta \sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \times \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3$$

$$= \frac{1}{-32i} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3$$

$$= \frac{1}{-32i} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^2 \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{-32i} (e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta}) \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{-32i} (e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 2(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))$$

$$= \frac{1}{-32i} (2i \sin 5\theta - 2i \sin 3\theta - 2 \times 2i \sin \theta)$$

$$= -\frac{1}{16} (\sin 5\theta - \sin 3\theta - 2 \sin \theta)$$

II) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS C :

1) Les racines carrées d'un complexe :

Définition : On appelle racine carrée d'un complexe Δ tout complexe δ qui vérifie : $\delta^2 = \Delta$.

Activité : Déterminer les racines carrées des

nombre complexes suivants : 1) $z_1 = 5$

2) $z_2 = -4$ 3) $z_3 = -3 + 4i$ 4) $z_4 = -5 - 12i$

Solution : 1) $z_1 = 5 = (\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2$

Donc : les racines carrées de $z_1 = 5$ sont :

$$\delta_1 = \sqrt{5} \text{ et } \delta_2 = -\sqrt{5}$$

$$2) z_2 = -4 = (2i)^2 = (-2i)^2$$

Donc : les racines carrées de $z_2 = -4$ sont :

$$\delta_1 = 2i \text{ et } \delta_2 = -2i$$

$$3) z_3 = -3 + 4i$$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2 = z_3$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |z_3|$

$$\text{par suite : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ et puisque } xy = 2 > 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

donc : $\delta_1 = 1 + 2i$ et $\delta_2 = -1 - 2i$

$$4) z_4 = -5 - 12i$$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2 = z_3$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |z_3|$

$$\text{par suite : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ et puisque } xy = 2 > 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

donc : $\delta_1 = 1 + 2i$ et $\delta_2 = -1 - 2i$

Propriété : Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposés.

Remarque : Dans certain cas on peut déterminer les racines carrées du complexe Δ sans passer par la procédure précédente :

1) Si $\Delta = re^{i\theta}$ alors les racines carrées de Δ sont

$$\delta_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } \delta_2 = -\delta_1 \text{ (on utilise la forme trigonométrique)}$$

2) Si on remarque une identité remarquable par exemple $\Delta = -8 + 6i$

$$\text{On a } 6i = 2 \times 1 \times 3i \text{ et } 12 + (3i)^2 = -8$$

$$\text{Donc } \Delta = -8 + 6i = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = (1 + 3i)^2$$

Donc les racines carrées de Δ sont : $\delta_1 = 1 + 3i$ et $\delta_2 = -\delta_1$

2) Les équations de second degré

Considérons l'équation $P(z) = az^2 + bz + c = 0$

Où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

On a :

$$P(z) = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z \right) + c = a \left(z^2 + 2 \frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c$$

$$P(z) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet racine double :

$$z = -\frac{b}{2a}$$

2) Si $\Delta \neq 0$; soit δ l'un des deux racines carrées

de Δ , on aura : $P(z) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right)$

$$P(z) = a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right)$$

$$P(z) = a \left(z + \frac{b+\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b-\delta}{2a} \right)$$

On pose : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ on a :

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = z_1 \text{ ou } z = z_2$$

Propriété : Considérons dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = (E)$ où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant on a :

Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où δ une racine carrée de Δ

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$$\text{et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : 1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$

$$2) (E): z^2 - z - 2 = 0$$

$$3) (E): z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$4) (1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$$

Solution : 1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$\text{Donc les solutions sont : } z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$$

$$2) (E): z^2 - z - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ e

$$z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\text{Donc : } S = \{-1; 2\}$$

$$3) (E): z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 = 0$$

L'équation (E) admet comme solution le complexe

$$z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ donc : } S = \{1\}$$

$$4) (1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-(1+7i))^2 - 4(1+i)(14+12i) = 0$$

$$\Delta = -56 - 90i$$

On va Déterminer les racines carrées de Δ

Soit δ une racine carrée de Δ donc : $\delta^2 = \Delta$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } \delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3 \text{ et } |\delta|^2 = |\Delta|$$

$$\text{par suite : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -55 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-56)^2 + (-90)^2} = 106 \\ 2xy = -90 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5 \\ y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm 9 \text{ et puisque } xy = -45 < 0 \\ xy = -45 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \delta_1 = 5 - 9i \text{ et } \delta_2 = -5 + 9i$$

donc : $\delta = 5 - 9i$ est une racine carrée de Δ

Donc les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{1 + 7i + 5 - 9i}{2(1+i)}$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{1 + 7i - 5 + 9i}{2(1+i)}$$

$$\text{donc : } z_1 = 1 - 2i \text{ et } z_2 = 3 + 5i$$

$$\text{donc : } S = \{1 - 2i; 3 + 5i\}$$

Propriété : Si l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 alors $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

Exemple : soit $z \in \mathbb{C}$ on pose : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1) calculer : $P(1-i)$

2) en déduire dans \mathbb{C} la résolution de l'équations

$$P(z) = 0$$

Solution :1)

$$P(1-i) = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 = 0$$

Donc $z_1 = 1-i$ est une racine de de l'équations

$$P(z) = 0 \text{ et on a : } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ donc :}$$

$$1-i + z_2 = -\frac{-2}{1} \text{ donc } z_2 = 2+i-1 = 1+i$$

$$\text{Par suite : } S = \{1-i; 1+i\}$$

Exercice2 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suivantes : 1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

3) $(4\cos\theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin\theta = 0$ avec : $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Solution :

1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$ ssi $z^2 - 4 = 0$ ou $z^2 + 9 = 0$

Ssi $z^2 = 4$ ou $z^2 = -9$

Ssi $z = \sqrt{4}$ ou $z = -\sqrt{4}$ ou $z = \sqrt{9i}$ ou $z = -\sqrt{9i}$

Ssi : $z = 2$ ou $z = -2$ ou $z = 3i$ ou $z = -3i$

Donc : $S = \{-3i; 3i; -2; 2\}$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(13) = 36 - 52 = (4i)^2$$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$

Et $z_2 = \overline{z_1} = 3-2i$ donc : $S = \{3-2i; 3+2i\}$

3) $(4\cos\theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin\theta = 0$

$$\Delta = (2(\cos 2\theta))^2 - 4(4\cos\theta)(\sin\theta)i$$

$$\Delta = 4\cos^2 2\theta - 16i\cos\theta\sin\theta$$

$$\Delta = 4(\cos^2 2\theta - 4i\cos\theta\sin\theta)$$

On a : $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$ et $\cos^2 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta$

Donc : $\Delta = 4(1^2 + i^2 \times \sin^2 2\theta - 2i\sin 2\theta)$

Donc : $\Delta = (2(1-i\sin 2\theta))^2$

les solutions sont : $z_1 = \frac{2(\cos 2\theta) + 2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

et : $z_2 = \frac{2(\cos 2\theta) - 2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

les solutions sont : $z_1 = \frac{\cos 2\theta + 1 - i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et : $z_2 = \frac{\cos 2\theta - 1 + i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et on a : $\cos 2\theta - 1 = -2\sin^2\theta$ et $\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta$

donc : $z_1 = \frac{2\cos^2\theta - i2\sin\theta\cos\theta}{4\cos\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2}$

et $z_2 = \frac{-\sin^2\theta + i\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$

Exercice3 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suivantes : 1) $z^2 + 2z + 5 = 0$ 2) $2z^2 + 3iz + (1-i) = 0$

3) $3iz^2 + (1-2i)z + 5i + 1 = 0$

Exercice4 : 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

2) Soit $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels $a; b; c$ tels que :

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 0$

Solution :1) $z^2 - 8z + 17 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(17) = 64 - 68 = (2i)^2$$

les solutions sont : $z_1 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4-i$

donc : $S = \{4-i; 4+i\}$

2)a) soit $z_0 = bi$ une solution imaginaire pur de

l'équation $P(z) = 0$ donc :

$$z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$$

Donc : $(bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$

Donc : $-ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

Donc : $-ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

Donc : $8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2 + 8b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b(b+1) = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = -1 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$$

$b = 0$ ne vérifie pas $-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$

Car $-0^3 - 0^2 + 17 \cdot 0 + 17 \neq 0$

$b = -1$ vérifie $-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$ car :

$$-(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$$

Donc : $b = -1$ donc : $z_0 = (-1)i = -i$ est l'unique

solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$

2)b) $(z+i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci$

$$P(z) = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci$$

Et on a : $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a = 1 \\ b + ai = -8 + i \\ c + bi = 17 - 8i \\ ci = 17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c - 8i = 17 - 8i \\ c = 17 \end{cases}$$

donc : $a = 1$ et $b = -8$ et $c = 17$

Donc : $P(z) = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

2)c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z + 17 = 0 \text{ ou } z + i = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 4+i \text{ ou } z_2 = 4-i \text{ ou } z_0 = -i$$

Donc : $S = \{4-i; 4+i; -i\}$

Exercice5 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$ 2) $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

Solutions : 1) $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$ $\Delta = -36$

Donc : $z_1 = \frac{2 - i\sqrt{36}}{4}$; $z_2 = \frac{2 + i\sqrt{36}}{4}$

Donc : $S = \left\{ \frac{1-3i}{2} ; \frac{1+3i}{2} \right\}$

2) $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

On remarque que 2 est solution

donc : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$ est divisible par : $z - 1$

La division euclidienne de $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$ par :

$z - 1$ nous donne : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = (Z-1)(3Z^2 + 2)$

$$3Z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow Z = i\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc les solutions de : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

sont : $Z = 1$ ou $Z = i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc : $S = \left\{ 1; i\sqrt{\frac{2}{3}}; -i\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$

Exercice6 : soit : $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2) en déduire : $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Solution : 1) $z = e^{-i\pi} \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{i\pi}{4}}} = e^{\frac{i\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \pi} = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$$z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = -\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$z = \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

2) $\sin \frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$ et $\cos \frac{-11\pi}{12} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

Donc : $\cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ et $\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

Exercice7 : Soit

$$P(z) = (i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i$$

1) Montrer que l'équation (E) : $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur z_0 unique comme solution

2) déterminer les nombres complexes $a; b; c$ tels

que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Solution : 1) soit $z_0 = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$ donc :

$$(i-1)z_0^3 - (5i-11)z_0^2 - (43+i)z_0 + 9 + 37i = 0$$

$$(i-1)(\lambda i)^3 - (5i-11)(\lambda i)^2 - \lambda i(43+i) + 9 + 37i = 0$$

Donc :

$$(\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9) + i(\lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 = 0 \\ \lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37 = 0 \end{cases}$$

On remarque que 1 est l'unique solution du système donc : $z_0 = i$ est la solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$

2) $z_0 = i$ est une racine de $P(z)$ donc $P(z)$

Est divisible par $z - i$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par $z - i$

on trouve :

$$P(z) = (z - i)((i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i)$$

Donc : $a = i-1$ et $b = 10-6i$ et $c = -37+9i$

3)

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)((i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i) = 0$$

$$\Leftrightarrow (i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i = 0 \text{ ou } z - i = 0$$

On va résoudre l'équation :

$$(i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i = 0 \text{ (F)}$$

$$\Delta' = (5-3i)^2 - (i-1)(-37+9i) = -12 + 16i$$

$$\Delta' = -12 + 2 \times 4 \times 2i = (4i)^2 + 2 \times 2 \times 4i + (2)^2 = (2+4i)^2$$

Donc : une racine carrée de Δ' est : $2+4i$

Donc : les solutions de (F) sont :

$$z_1 = 5 - 2i \text{ ou } z_2 = 3 + 4i$$

Donc les solutions de (E). sont :

$$S = \{5 - 2i; 3 + 4i; i\}$$

Exercice8 : Soit dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$$

1) Montrer que l'équation (E): $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 à déterminer

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Solution : 1) soit $z_0 = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une solution réelle de l'équation (E). donc :

$$2\lambda^3 - (1+2i)\lambda^2 + (25i-1)\lambda + 13i = 0$$

$$\text{Donc : } (2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda) + i(-2\lambda^2 + 25\lambda + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0 \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ ou } \lambda = 1 \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \end{cases}$$

On remarque que $\lambda = -\frac{1}{2}$ le seul vérifiant

$-2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0$ donc solution du système

donc : $z_0 = -\frac{1}{2}$ est la solution réelle de

L'équation (E)

2) on pose :

$$P(z) = 2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i$$

$z_0 = -\frac{1}{2}$ est une racine de $P(z)$

donc $P(z)$ est divisible par $z + \frac{1}{2}$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par

$z + \frac{1}{2}$ on trouve :

$$P(z) = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z^2 - (1+i)z + 13i\right)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow 2\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z^2 - (1+i)z + 13i\right) = 0$$

On va résoudre l'équation :

$$z^2 - (1+i)z + 13i = 0 \quad (F)$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 52i = -50i = (5(1-i))^2$$

Donc : une racine carrée de Δ est : $5(1-i)$

Donc : les solutions de (F) sont :

$z_1 = -2 + 3i$ ou $z_2 = 3 - 2i$ Donc les solutions de

(E). sont : $S = \left\{-2 + 3i; 3 - 2i; -\frac{1}{2}\right\}$

III) LES RACINES N-ÈME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ième de l'unité :

Définition : On appelle racine n-ième de l'unité

tout complexe u qui vérifie : $u^n = 1$

Autrement dit ; les racines n-ième de l'unité sont

les solutions de l'équation $u^n - 1 = 0$

Exemples :

1) Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1

2) Les racines cubique de l'unité sont : 1, j et j^2

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = [1, 2\pi/3]$$

Preuve (d'une propriété)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'équation : $u^n = 1$

$u = 0$ n'est pas une racine de l'équation

précédente. On pose : $u = e^{\alpha i}$

(à remarquer que si u est une racine ; $|u| = 1$)

On a donc : $u^n = 1 \Leftrightarrow [1, \alpha]^n = [1, 0]$

$$\Leftrightarrow n\alpha = 0 \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{n} \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$$

Donc les racines n-ième de l'unité sont les

complexes : $u_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

où $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Propriété : L'unité admet n racines n-ème qui

s'écrivent de la forme : $u_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

Où $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Exemple : Les racines 4ème de l'unité sont :

$$u_k = e^{\frac{k\pi i}{2}} \quad \text{Où } k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$1) u_0 = e^{\frac{0\pi i}{2}} = e^0 = 1 \quad 2) u_1 = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

$$3) u_2 = e^{\pi i} = -1 \quad 4) u_3 = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$$

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Soit $a = re^{\theta i}$ un complexe non nul ($r > 0$) et

considérons l'équation (E): $z^n = a$

$z = \rho e^{\alpha i}$ Est une solution de l'équation (E)

alors : $\rho^n e^{\alpha i n} = re^{\theta i}$

ssi $\rho^n = r$ et $n\alpha = \theta + 2k\pi$

ssi $\rho = \sqrt[n]{r}$ et $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Où $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Propriété : Le nombre complexe non nul $a = re^{\theta i}$ admet n racines n -ème ($n \in \mathbb{N}^*$) différentes qui

sont : $u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n} i}$

où $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Exemple : Soit le nombre complexe

$$z = \frac{-\sqrt{2}}{16}(1+i)$$

1) Déterminer le Module et Argument de z

2) Déterminer les racines 3-ème du nombre complexe z sous forme exponentielle

Solution: 1) $|z| = \left| \frac{-\sqrt{2}}{16}(1+i) \right| = \left| \frac{-\sqrt{2}}{16} \right| |1+i|$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{16} \times \sqrt{2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Donc: $\arg z = \arg \frac{-\sqrt{2}}{16} + \arg(1+i) [2\pi]$

$$\arg z = \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ Donc : } \arg z = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$$

2) les racines cubiques de z sont :

$$u_k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} e^{\frac{5\pi + 2k\pi}{4} i} \quad \text{où } k \in \{0, 1, 2\}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi}{4} i} = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi}{12} i} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi + 2\pi}{4} i} = \frac{1}{2} e^{\frac{13\pi}{12} i}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi + 4\pi}{4} i} = \frac{1}{2} e^{\frac{21\pi}{12} i}$$

IV) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation :

1.1 Définition géométrique.

Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 ; on appelle translation la transformation dans le plan qui associe à tout

point M du plan le point M' tel que : $\overline{MM'} = \vec{u}$

1.2 Ecriture complexe d'une translation.

Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 tel que : $\text{aff}(\vec{u}) = a$

et $t_{\vec{u}}$ la translation de \vec{u} . La translation $t_{\vec{u}}$

transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $\overline{MM'} = \vec{u}$

$$\overline{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow \text{aff}(M') - \text{aff}(M) = \text{aff}(\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow z' - z = a \Leftrightarrow z' = z + a$$

Propriété : Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 tel que :

$\text{aff}(\vec{u}) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$

en $M'(z')$ si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la

translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur \vec{u} tel que $\text{aff}(\vec{u}) = a$

Exemple : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère les points : A ; B ; C d'affixe respectivement $z_A = 3 + 5i$; $z_B = 3 - 5i$; $z_C = 7 + 3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de $M(z)$ par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4 - 2i$

1) montrer que : $z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u})

2) vérifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Solution: 1) $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i \text{ (l'écriture complexe de la translation de vecteur } \vec{u} \text{)}$$

2) on a : $z_A = 3 + 5i$

$$\text{Donc : } z' = 3 + 5i + 4 - 2i$$

$$\text{Donc : } z' = 7 + 3i = z_C$$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) on a : $z_B = 3 - 5i$ Donc : $z' = 3 - 5i + 4 - 2i$

$$\Leftrightarrow z' = 7 - 7i = z_{B'}$$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation

$$t_{\vec{u}} \text{ est } z_{B'} = 7 - 7i$$

2) L'homothétie

2.1 Définition géométrique.

Définition : Soient $\Omega(\omega)$ un point dans le plan et k un réel non nul ; on appelle l'homothétie de centre Ω et de rapport k , la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$ et se note $h(\Omega, k)$

• Si $k = 1$ alors la transformation $h(\Omega, 1)$ est l'identité de (\mathcal{P}) et tous les points du plan seront invariants

• Si $k \neq 1$ alors le seul point invariant par $h(\Omega, k)$ est le point Ω le centre de la transformation $h(\Omega, k)$

2.2 Ecriture complexe d'une homothétie.

$\Omega(\omega)$ un point dans le plan complexe et k un réel non nul et différent de 1

et $h(\Omega, k)$ l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k , qui transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_{\Omega} = k(z_M - z_{\Omega}) \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow$$

$$z' = kz + \omega(1 - k) \text{ (l'écriture complexe de$$

l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k)

Propriété: l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k , admet une écriture complexe de la forme: $z' = kz + \omega(1 - k)$

Exemple : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère les points : A d'affixe $z_A = 3 + 5i$ et soit

z' l'affixe de M' l'image de $M(z)$ par l'homothétie

de centre $\Omega(3; -2)$ et de Rapport $k = 4$

1) montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega, k)$)

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega, k)$

Solution: 1) $h_{(\Omega; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_{\Omega}(1 - k)$$

$$\Leftrightarrow z' = 4z + z_{\Omega}(1 - 4) \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3 - 2i)$$

$$\Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i$$

2) on a : $z_A = 3 + 5i$ et $z' = 4z - 9 + 6i$

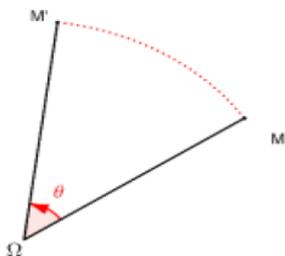
$$\text{Donc : } z' = 4(3 + 5i) - 9 + 6i$$

Donc $z_{A'} = 3 + 26i$

3) La rotation :

3.1 Définition géométrique :

Definition: Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, la Rotation de centre Ω et



d'angle θ est l'application

qui transforme tout point M en M' tel que:

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

On la note par : $R(\Omega, \theta)$

Remarque :

- Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$ alors la rotation d'angle nul est l'identité de (\mathcal{P}) et tous les points du plan seront invariants.
- Si $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ alors le seul point invariant par $R(\Omega, \theta)$ est le point Ω le centre de la rotation (Ω, θ)

3.2 L'écriture complexe d'une rotation.

Soient $\Omega(\omega)$ un point dans le plan complexe et θ un réel non nul. la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$

tel que :
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_M - z_\Omega| = |z_{M'} - z_\Omega| \\ \arg \left(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' = (z - \omega) e^{i\theta} + \omega$$

Propriété : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega) e^{i\theta} + \omega$$

Exemple: Dans le plan complexe direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

on considère les points : A ; B d'affixe

$$\text{respectivement } z_A = 7 + 2i ; z_B = 4 + 8i$$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de $M(z)$ par la

rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10 + 11i$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha} (z_M - z_B) + z_B$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) (z - 4 - 8i) + z$$

$$\Leftrightarrow z' = i(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 4i + 12$$

2) on a : $z_A = 7 + 2i$

$$\text{Donc : } z' = i(7 + 2i) + 4i + 12$$

$$\text{Donc : } z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10 \text{ cqfd}$$

Exercice9 : Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha} (z - z_\Omega) + z_\Omega$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{4}} (z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) (z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i)z + \sqrt{2} + 1 + i$$

Exercice 10 : Soit la rotation r de centre $\Omega (i)$ et transforme O en $O' \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)$

Déterminer l'angle de cette rotation

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha} (z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta} (z - i) + i$$

Et puisque : $r(O) = O'$ alors : $\frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{i\theta} (0 - i) + i$

$$\Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3} + i}{2}}{0 - i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Donc : } \theta \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi]$$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

4) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$:

1er cas : $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2eme cas : $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = z + b$

Donc $z' - z = b$ ce qui se traduit par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

où $aff(\vec{u}) = b$ (constant)

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur \vec{u} tel que : $aff(\vec{u}) = b$

Propriété : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = z + b$ est la translation de vecteur \vec{u} tel que $aff(\vec{u}) = b$

3ème cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Soit f une Transformation plane qui transforme

$M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$

où $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$

On a : $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$

Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a : Le point $\Omega(\omega)$ est un point

invariant par f car : $\omega' = a\frac{b}{1-a} + b = \frac{b}{1-a} = \omega$

D'où : $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on

obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$ donc : f est l'homothétie de centre

$\Omega(\omega)$ et de rapport a où $\omega = \frac{b}{1-a}$

4ème cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

Soit f une transformation plane qui transforme

$M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$

et $|a| = 1$; $b \in \mathbb{C}$

On a : $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$ soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$

(ω est la solution de l'équation : $z = az + b$)

on a : $\Omega(\omega)$ est un point invariant par f .

On pose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

D'où : $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on

obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$

on en déduit : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = a$ et par suite :

$$\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = |a| = 1$$

par suite $|z - \omega| = |z' - \omega|$ ce qui se traduit par

$$\Omega M' = \Omega M \text{ et } \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \arg a [2\pi] \equiv \alpha [2\pi]$$

Ce qui se traduit : $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha [2\pi]$

et finalement : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$

donc la transformation f est la rotation de centre

$$\Omega(\omega = \frac{b}{1-a}) \text{ et d'angle } \alpha.$$

Propriété : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = az + b$ où a est un complexe tel que $|a| = 1$ est la rotation d'angle $\alpha \equiv \text{arg}(a) [2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$

$$\text{tel que } \Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$$

5me cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$

on pose $a = re^{ai}$ On a : $f(M(z)) = M'(z')$

$$\Leftrightarrow z' = az + b \Leftrightarrow z' = re^{ai}z + b \Leftrightarrow z' = r \left(e^{ai}z + \frac{b}{r} \right)$$

D'après le 4ème cas ; la transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = e^{ai}z + \frac{b}{r} \text{ est la rotation } R \text{ de d'angle } \alpha \text{ et de}$$

centre le point $\Omega(\omega)$ tel que : $\omega = e^{ai}\omega + \frac{b}{r}$

($\Omega(\omega)$ est le point fixe par R). (**)

$$\text{Donc : } f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = rz_1 \text{ où } z_1 = e^{ai}z + \frac{b}{r}$$

D'après le 3ème cas ; la transformation plane qui

transforme $M_1(z_1)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = rz_1$

est l'homothétie h de rapport r de centre le point $O(0)$ ($O(0)$ est le point fixe par h).

$$\text{Donc : } f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b \Leftrightarrow z' = r(R(z))$$

$$\Leftrightarrow z' = h(R(z)) \Leftrightarrow z' = (hoR)(z)$$

Finalement f est la composition de la rotation R d'angle $\alpha \equiv \text{arg}(a) [2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$

$$\text{tel que } \omega = \frac{b}{r(1-e^{ai})} = \frac{b}{|a|-a}; \text{ et de l'homothétie}$$

h de rapport $r = |a|$ et de centre $O(0)$

Théorème : Soit a un complexe ($a \notin \mathbb{R}$). La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha \equiv \text{arg}(a) [2\pi]$ et de

$$\text{centre } \Omega(\omega) \text{ où } \omega = \frac{b}{|a|-a}$$

2) h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de centre $O(0)$

Exercice 11: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a : Le point $\Omega(\omega)$ est

$$\text{un point invariant par } f: \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{3} = 1-i$$

$$\text{D'où: } \begin{cases} z' = -2z + 3 - 3i \\ \omega = -2\omega + 3 - 3i \end{cases} \text{ en faisant la différence on}$$

obtient : $z' - \omega = -2(z - \omega)$ qui se traduit par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M} \text{ Donc : } f \text{ est l'homothétie de centre } \Omega(\omega = 1-i) \text{ et de Rapport } -2$$

5) le composé de certaines transformations 5-1) le composé de deux rotations

Exemple: Dans le plan complexe direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

on considère le point : $A(i)$ et la rotation R_0 de

centre $O(0)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 la rotation de

centre $A(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$

et ses éléments caractéristiques

Solution : soit un point $M(z)$

$$\text{On pose : } R_0(M) = M'(z') \text{ et } R_1(M') = M''(z'')$$

$$R_0(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O) + z_O$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z \text{ Car } z_O = 0$$

$$\text{Et on a : } R_1(M') = M''(z'') \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}} (z' - z_A) + z_A$$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} z - i \right) + i \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} z + i \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + i \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \Leftrightarrow z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On sait que la composée de deux rotation est une

rotation $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi \right)$

Déterminons le centre de la rotation : $R_1 \circ R_0$?

Le centre de la rotation est le point invariant :

$$\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \omega(1-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Donc : } \omega = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

$$\text{On a : } \arg i = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

L'angle de la rotation est : $\frac{\pi}{2}$

5-2) le composé d'une rotation et une translation

Exemple: soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

et soit R la rotation de centre A et qui transforme

B en C et soit la translation $T = t_{\overline{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

Solution : on considère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme repère normé donc : L'angle de la rotation R est : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

donc : R la rotation de centre A (0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\text{donc : } R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A) + z_A$$

Donc l'écriture complexe de la rotation R est .

$$R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = iz$$

l'écriture complexe de la translation translation

$$T = t_{\overline{AB}} \text{ est : } z'' = z + 1$$

soit un point M (z) : on pose : $F_1(M) = M_1(z_1)$

et $F_2(M) = M_2(z_2)$

$$\text{on a donc : } z_1 = i(z + 1) \text{ et } z_2 = iz + 1$$

$$\text{on a : pour } F_1 : z = i(z + 1) \Leftrightarrow (1 - i)z = i$$

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$$

pour F_1 le seul point invariant est

$$\Omega_1 \left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2} \right) \text{ et on a :}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z + \omega_1 \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$$

donc F_1 est la rotation de centre $\Omega_1 \left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2} \right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

De même : pour F_2 le seul point invariant est

$$\Omega_2 \left(\omega_2 = \frac{1+i}{2} \right) \text{ et on a : } z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} z + \omega_2 \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$$

donc F_2 est la rotation de centre : $\Omega_2 \left(\omega_2 = \frac{1+i}{2} \right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

5-3) le composé d'une homothétie et une translation

Soit $k \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

et $H(\Omega, k)$ l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de

Rapport k et Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 tel que :

$\vec{u} (b) \quad b \in \mathbb{C}$ et Soit la Translation $T = t_{\vec{u}}$

On Pose: $F = H \circ T$ et $G = T \circ H$

l'écriture complexe de l'homothétie $H(\Omega, k)$ est :

$$z_1 = kz + \omega(1 - k)$$

l'écriture complexe de la Translation $T = t_{\vec{u}}$ est :

$$z_2 = z + b$$

Determinons l'écriture complexe de F et G ?

soit un point $M(z)$: on pose : $F(M) = M'(z')$ et

$$G(M) = M''(z'')$$

a) On a : $F(M) = M'(z')$ donc :

$$z' = k(z + b) + \omega(1 - k) = kz + kb + (1 - k)\omega$$

Donc l'écriture complexe de F est:

$$z' = kz + kb + (1 - k)\omega$$

On vérifie que : $A\left(\frac{k}{1-k}b + \omega\right)$ est le seul point

invariant par F

Donc : F est l'homothétie de centre $A\left(\frac{k}{1-k}b + \omega\right)$

et de Rapport k

b) soit un point $M(z)$: on pose : $M'' = T(M_1(z_1))$

et $M_1 = H(M)$ et $G(M) = M''(z'')$

donc : $z'' = z_1 + b$ et $z'' = kz + b + (1 - k)\omega$

Donc l'écriture complexe de G est:

$$z'' = kz + b + (1 - k)\omega \quad \text{on vérifie que : } B\left(\frac{b}{1-k} + \omega\right)$$

est le seul point invariant par G

Donc : G est l'homothétie de centre $B\left(\frac{b}{1-k} + \omega\right)$

et de Rapport k

5-4) le composé d'une homothétie et une rotation

Activité : Dans le plan complexe direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

on considère le point : $A(2)$ et soit φ une

transformation qui transforme $M(z)$ en $M_2(z_2)$ tel

que $z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et soit H l'homothétie

de centre $A(2)$ et de Rapport $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Et soit : $f = \varphi \circ H$

On a : $A = \varphi(A)$ à vérifier (A est le seul point

invariant par φ) donc : l'écriture complexe de

l'homothétie H est : $z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(z - 2) + 2$

Pour tout point $M(z)$ soit $f(M) = M'$ et $M'(z')$

On a : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et on peut l'écrire

sous forme: $z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z_1 - 2)$

et puisque: $z_1 - 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(z - 2)$

alors : $z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}(z - 2)$

Donc: $z' - 2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z - 2)$ et puisque: $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$

alors : $z' - 2 = e^{\frac{\pi}{6}i}(z - 2)$

donc : f est une rotation de centre $A(2)$

d'angle $\frac{\pi}{6}$

et puisque: $f = \varphi \circ H$ alors: $f \circ H^{-1} = (\varphi \circ H) \circ H^{-1}$

cad $f \circ H^{-1} = \varphi \circ (H \circ H^{-1})$ et et puisque:

$H \circ H^{-1} = I_p$ alors: $f \circ H^{-1} = \varphi$

finalement φ est la composée de la rotation de

centre A (2) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'homothétie H de

centre A (2) et de Rapport $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 12: soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$

Solution : soit $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$|z-1| = |z-|z| + (|z|-1)| \leq |z-|z|| + ||z|-1|$$

On pose : $z = R e^{i\theta}$ avec $R > 0$

$$\text{On a : } |z-|z|| = |R e^{i\theta} - R| = R |e^{i\theta} - 1|$$

$$= R \left| \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} \right| = R \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \right|$$

$$\text{Donc : } |z-|z|| = 2R \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

Or on sait que : $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } |z-|z|| \leq |z| |\theta| = |z| |\arg z|$$

$$\text{Donc : } |z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$$

Exercice 13 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ et } a \neq c \text{ et } b \neq c$$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$

$$\text{Solution : } \overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}} \right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{1-\frac{1}{c}}{1-\frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{1}{b} = \left(\frac{b-c}{bc} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{1-\frac{1}{c}}{1-\frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{1}{b} = \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

2) puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg \left(\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 + \arg \left(\frac{a}{b} \right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\text{Donc : } 2 \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv -\arg \left(\frac{a}{b} \right) [\pi]$$

$$\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

Exercice 14 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\text{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

Solution : on a : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7 = 1$

$$1) \bar{S} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4$$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\bar{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \text{ et on a } z^7 = 1$$

$$\text{Donc : } z^6 = \frac{1}{z} \text{ et } z^5 = \frac{1}{z^2} \text{ et } z^3 = \frac{1}{z^4}$$

$$\text{Donc : } \bar{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} = z^3 + z^5 + z^6 = T$$

Donc : les nombres S et T sont conjugués

2) Montrons que : $\text{Im}(S) > 0$?

$$\text{On a : } S = z + z^2 + z^4 \text{ et } z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(S) = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$$

$$\text{Im}(S) = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right)$$

$$\text{Im}(S) = \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \text{ puisque : } \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } \sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7} \text{ et on a } \sin \frac{4\pi}{7} > 0$$

$$\text{Donc : } \text{Im}(S) > 0$$

3) calculons $S+T$ et $S \times T$?

$$S+T = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

$$S+T = (1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6) - 1$$

$$S+T = \frac{1-z^7}{1-z} - 1 = -1 \text{ car } z^7 = 1$$

$$S \times T = (z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$$

$$S \times T = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$$

$$S \times T = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$$

$$\text{On a } z^7 = 1 \text{ donc : } z^8 = z \text{ et } z^9 = z^2 \text{ et } z^{10} = z^3$$

$$\text{donc : } S \times T = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 2$$

$$S \times T = \frac{1-z^7}{1-z} + 2 = 2 \text{ car : } z^7 = 1$$

4) on a $S+T = -1$ et $S \times T = 2$ donc S et T sont

les solutions de l'équation : $x^2 + 1x + 2 = 0$

$$\Delta = -7 = (\sqrt{7}i)^2$$

En résolvant l'équation on trouve :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \text{ et on a } \text{Im}(S) > 0$$

$$\text{Donc : } S = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \text{ et } T = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices Que l'on devient un mathématicien*

