

NOMBRES COMPLEXES

Exercice1 : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i$ 2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Solution :1) $z_1 = 2 + 2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Donc : $z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1 \times z_2$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4} - (-i\frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$

Exercice2 : en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4\cos \theta \sin^3 \theta$

Solutions :1)d'après Moivre on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

Et on a : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$

Donc : $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

Donc : $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos \theta \sin \theta$

2) d'après Moivre on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos^3 \theta + 3(\cos \theta)^2 i \sin \theta + 3\cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta + i(3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta + i(3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

Donc : $\sin 3\theta = 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$

Et : $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta$

$$= \cos^3 \theta - 3\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

Donc :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta + 3\cos^3 \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

Et $\sin 3\theta = 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta$

$$= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

3)montrons que : $\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4\cos \theta \sin^3 \theta$?

3) d'après Moivre on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos^4 \theta + 4(\cos \theta)^3 i \sin \theta - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$-4i \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta$$

Donc : $\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$

Et $\sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4\cos \theta \sin^3 \theta$

Donc :

$$\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2$$

Finalement on a donc :

$$\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4\cos \theta \sin^3 \theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4 \theta$

Solution : On a :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$$

Donc : $\cos^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^4 (e^{4i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 6 + 3e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 3(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6)$$

$$= \frac{1}{16} (2\cos 4\theta + 3 \times 2\cos 2\theta + 6)$$

Car $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

Donc : $\cos^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 3\cos 2\theta + 3)$

Donc : $\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{3}{8} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

Exercice4 : 1) Montrer que $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2) on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Solution :1) à vérifier

2)a) $u + v = 3e^{i\frac{\pi}{5}} + 3e^{i\frac{\pi}{7}} = 3 \left(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{7}} \right)$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{14}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{14}\right)} \right)$$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)} \right)$$

$$u + v = 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right) e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \text{ et puisque}$$

$$6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right) > 0 \text{ alors : } |u + v| = 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right)$$

Et $\arg(u+v) \equiv \frac{6\pi}{35} [2\pi]$

b) $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right)^2$

$$u_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) = 2\cos\frac{\pi}{6} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

alors : $u_1 = \sqrt{3} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad |u_1| = \sqrt{3}$

Et $\arg(u_1) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

triangle de Pascal

$$c) u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right)^2$$

$$u_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) = -2i \sin \frac{\pi}{6} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \sin n\theta$

$$\text{alors : } u_2 = -i \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad |u_2| = 1$$

$$\text{Et } \arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ donc : } \arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{Et } \arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ donc : } \arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Exercice5 : 1) en utilisant la formule d'Euler

$$\text{Montrer que : } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ Montrer que : } \cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

$$3) \text{ Montrer que : } \sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$4) \text{ Montrer que : } \sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

$$5) \text{ Linéariser : a) } \sin^5 \theta \quad \text{b) } \cos^2 \theta \sin^3 \theta$$

$$\text{Solution : 1) On a : } \cos^2 x = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 (e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} e^{-i\theta} + e^{-2i\theta})$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2) = \frac{1}{4} (2 \cos 2\theta + 2) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$2) \cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta ?$$

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta})$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} \left((e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right)$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$ donc :

$$= \frac{1}{8} (2 \cos 3\theta + 3 \times 2 \cos \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

$$3) \sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta ?$$

$$\text{On a : } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Donc :

$$\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} \left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{8i} (e^{i3\theta} - 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta})$$

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{8i} \left((e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right)$$

Et on a : $2i \sin n\theta = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$ donc :

$$= -\frac{1}{8i} (2i \sin 3\theta - 3 \times 2i \sin \theta) = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

$$4) \sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} ?$$

$$\text{On a : } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} \left((e^{i\theta})^4 - 4(e^{i\theta})^3 \cdot e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^2 \cdot (e^{-i\theta})^2 - 4(e^{i\theta})^1 (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4 \right)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{3i\theta} \cdot e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} \cdot e^{-2i\theta} - 4e^{i\theta} \cdot e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (-4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6 + (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}))$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$ donc :

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (-4 \times 2 \cos 2\theta + 6 + 2 \cos 4\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} (-4 \cos 2\theta + 3 + \cos 4\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

5)a) On a :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$\text{Donc : } \sin^5 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{2i} \right)^5 (e^{5i\theta} - 5e^{4i\theta} e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta} e^{-2i\theta} - 10e^{2i\theta} e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta} e^{-4i\theta} - e^{-5i\theta})$$

$$= -\frac{1}{32i}(e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta})$$

$$= -\frac{1}{32i}(e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - 5(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))$$

$$= -\frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta)$$

Car $e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \sin n\theta$

Donc : $\sin^5 x = -\frac{1}{16} \sin 5\theta + \frac{5}{16} \sin 3\theta - \frac{5}{8} \sin \theta$

5)b) $\cos^2 \theta \sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{1}{-32i}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3$$

$$= \frac{1}{-32i}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^2 \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{-32i}(e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta}) \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{-32i}(e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 2(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))$$

$$= \frac{1}{-32i}(2i \sin 5\theta - 2i \sin 3\theta - 2 \times 2i \sin \theta)$$

$$= -\frac{1}{16}(\sin 5\theta - \sin 3\theta - 2 \sin \theta)$$

Exercice6 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5$

2) $z_2 = -4$ 3) $z_3 = -3 + 4i$ 4) $z_4 = -5 - 12i$

Solution : 1) $z_1 = 5 = (\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2$

Donc : les racines carrées de $z_1 = 5$ sont :

$$\delta_1 = \sqrt{5} \text{ et } \delta_2 = -\sqrt{5}$$

2) $z_2 = -4 = (2i)^2 = (-2i)^2$

Donc : les racines carrées de $z_2 = -4$ sont :

$$\delta_1 = 2i \text{ et } \delta_2 = -2i$$

3) $z_3 = -3 + 4i$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2 = z_3$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |z_3|$

par suite :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ et puisque } xy = 2 > 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

donc : $\delta_1 = 1 + 2i$ et $\delta_2 = -1 - 2i$

4) $z_4 = -5 - 12i$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2 = z_3$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |z_3|$

par suite :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ et puisque } xy = 2 > 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

donc : $\delta_1 = 1 + 2i$ et $\delta_2 = -1 - 2i$

Exercice7 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -12$ 2) $z_2 = \cos \alpha - 2$ 3) $z_3 = 4 - 2i$

4) $z_4 = -4 - 3i$

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : 1) (E) : $z^2 - z + 2 = 0$

2) (E) : $z^2 - z - 2 = 0$

3) (E) : $z^2 - 2z + 1 = 0$

$$4) (1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$$

Solution :1) (E): $z^2 - z + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc : $S = \left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$

2) (E): $z^2 - z - 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ e

$$z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Donc : $S = \{-1; 2\}$

3) (E): $z^2 - 2z + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 = 0$$

L'équation (E) admet comme solution le complexe

$$z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \quad \text{donc : } S = \{1\}$$

$$4) (1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-(1+7i))^2 - 4(1+i)(14+12i) = 0$$

$$\Delta = -56 - 90i$$

On va Déterminer les racines carrées de Δ

Soit δ une racine carrée de Δ donc : $\delta^2 = \Delta$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$

$$\text{par suite : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -55 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-56)^2 + (-90)^2} = 106 \\ 2xy = -90 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5 \\ y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm 9 \quad \text{et puisque } xy = -45 < 0 \\ xy = -45 \end{cases}$$

donc : $\delta_1 = 5 - 9i$ et $\delta_2 = -5 + 9i$

donc : $\delta = 5 - 9i$ est une racine carrées de Δ

Donc les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{1+7i+5-9i}{2(1+i)}$$

et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{1+7i-5+9i}{2(1+i)}$

donc : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + 5i$

donc : $S = \{1 - 2i; 3 + 5i\}$

Exercice9 : soit $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$P(z) = z^2 - 2z + 2$$

1) calculer : $P(1-i)$

2) en déduire dans \mathbb{C} la résolution de l'équations

$$P(z) = 0$$

Solution :1)

$$P(1-i) = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 = 0$$

Donc $z_1 = 1 - i$ est une racine de de l'équations

$P(z) = 0$ et on a : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ donc :

$$1 - i + z_2 = -\frac{-2}{1} \quad \text{donc } z_2 = 2 + i - 1 = 1 + i$$

Par suite : $S = \{1 - i; 1 + i\}$

Exercice10 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suivantes : 1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

3) $(4\cos\theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin\theta = 0$ avec : $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$ ssi $z^2 - 4 = 0$ ou $z^2 + 9 = 0$

Ssi $z^2 = 4$ ou $z^2 = -9$

Ssi $z = \sqrt{4}$ ou $z = -\sqrt{4}$ ou $z = \sqrt{9i}$ ou $z = -\sqrt{9i}$

Ssi : $z = 2$ ou $z = -2$ ou $z = 3i$ ou $z = -3i$

Donc : $S = \{-3i; 3i; -2; 2\}$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(13) = 36 - 52 = (4i)^2$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$

Et $z_2 = \overline{z_1} = 3-2i$ donc : $S = \{3-2i; 3+2i\}$

3) $(4 \cos \theta) z^2 - 2(\cos 2\theta) z + i \sin \theta = 0$

$\Delta = (2(\cos 2\theta))^2 - 4(4 \cos \theta)(\sin \theta)i$

$\Delta = 4 \cos^2 2\theta - 16i \cos \theta \sin \theta$

$\Delta = 4(\cos^2 2\theta - 4i \cos \theta \sin \theta)$

On a : $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$ et $\cos^2 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta$

Donc : $\Delta = 4(1^2 + i^2 \times \sin^2 2\theta - 2i \sin 2\theta)$

Donc : $\Delta = (2(1-i \sin 2\theta))^2$

les solutions sont : $z_1 = \frac{2(\cos 2\theta) + 2(1-i \sin 2\theta)}{2(4 \cos \theta)}$

et : $z_2 = \frac{2(\cos 2\theta) - 2(1-i \sin 2\theta)}{2(4 \cos \theta)}$

les solutions sont : $z_1 = \frac{\cos 2\theta + 1 - i \sin 2\theta}{4 \cos \theta}$

et : $z_2 = \frac{\cos 2\theta - 1 + i \sin 2\theta}{4 \cos \theta}$

et on a : $\cos 2\theta - 1 = -2 \sin^2 \theta$ et $\cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta$

donc : $z_1 = \frac{2 \cos^2 \theta - i 2 \sin \theta \cos \theta}{4 \cos \theta} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{2}$

et $z_2 = \frac{-\sin^2 \theta + i \sin \theta \cos \theta}{2 \cos \theta}$

Exercice11 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suivantes : 1) $z^2 + 2z + 5 = 0$ 2) $2z^2 + 3iz + (1-i) = 0$

3) $3iz^2 + (1-2i)z + 5i + 1 = 0$

Exercice12 :1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$z^2 - 8z + 17 = 0$

2) Soit $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels $a; b; c$ tels que :

$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 0$

Solution :1) $z^2 - 8z + 17 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(17) = 64 - 68 = (2i)^2$

les solutions sont : $z_1 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4-i$

donc : $S = \{4-i; 4+i\}$

2)a) soit $z_0 = bi$ une solution imaginaire pur de

l'équation $P(z) = 0$ donc :

$z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$

Donc : $(bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$

Donc : $-ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

Donc : $-ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

Donc : $8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2 + 8b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b(b+1) = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = -1 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$

$b = 0$ ne vérifie pas $-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$

Car $-0^3 - 0^2 + 17 \cdot 0 + 17 \neq 0$

$b = -1$ vérifie $-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$ car :

$$-(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$$

Donc : $b = -1$ donc : $z_0 = (-1)i = -i$ est l'unique solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$

$$2)b) (z+i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci$$

$$P(z) = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci$$

$$\text{Et on a : } P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a=1 \\ b+ai = -8+i \\ c+bi = 17-8i \\ ci = 17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c-8i = 17-8i \\ c=17 \end{cases}$$

$$\text{donc : } a=1 \text{ et } b=-8 \text{ et } c=17$$

$$\text{Donc : } P(z) = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$$

$$2)c) P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z + 17 = 0 \text{ ou } z+i = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 4+i \text{ ou } z_2 = 4-i \text{ ou } z_0 = -i$$

$$\text{Donc : } S = \{4-i; 4+i; -i\}$$

Exercice 13 :

$$\text{Soit } P(z) = z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i = 0$$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur comme racine.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Exercice 14: soit dans \mathbb{C} l'équation :

$$\text{Soit (E) : } z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = 0$$

1) Montrer que 2 est une solution de l'équation (E)

2) montrer que :

$$z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$$

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Solution :

$$\begin{aligned} 1) 2^3 + 2(\sqrt{3}-1)2^2 + 4(1-\sqrt{3})2 - 8 &= 8 + 8(\sqrt{3}-1) + 8(1-\sqrt{3}) - 8 \\ &= 8 + 8\sqrt{3} - 8 + 8 - 8\sqrt{3} - 8 = 0 \end{aligned}$$

Donc : 2 est une solution de l'équation (E)

$$\begin{aligned} 2) (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) &= z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z - 2z^2 - 4\sqrt{3}z - 8 \\ &= z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 \end{aligned}$$

$$3) P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \text{ ou } z-2 = 0$$

$$\text{On va résoudre : } z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(4) = 12 - 16 = (2i)^2$$

Donc les solutions de l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{2} = -\sqrt{3} + i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{3} - i$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = -\sqrt{3} + i \text{ et } z_2 = -\sqrt{3} - i \text{ et } z_0 = 2$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i; 2\}$$

Exercice 15: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1) 2Z^2 - 2Z + 5 = 0 \quad 2) 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

$$\text{Solutions : 1) } 2Z^2 - 2Z + 5 = 0 \quad \Delta = -36$$

$$\text{Donc : } z_1 = \frac{2 - i\sqrt{36}}{4} ; z_2 = \frac{2 + i\sqrt{36}}{4}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{1-3i}{2} ; \frac{1+3i}{2} \right\}$$

$$2) 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

On remarque que 2 est solution

donc : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$ est divisible par : $z-1$

La division euclidienne de $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$ par :

$$z-1 \text{ nous donne : } 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = (Z-1)(3Z^2 + 2)$$

$$3Z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow Z = i\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc les solutions de : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

$$\text{sont : } Z = 1 \text{ ou } Z = i\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ 1; i\sqrt{\frac{2}{3}}; -i\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

Exercice16 : soit dans \mathbb{C} l'équation : (E)

$$P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i = 0$$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur z_0 à déterminer

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Solution :1) $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur

$$z_0 = ib \quad \text{Avec } b \in \mathbb{R}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 - (16-i)(ib)^2 + (89-16i)ib + 89i = 0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 + 16b + i(-b^3 - b^2 + 89b + 89) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 + 16b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 89b + 89 = 0 \end{cases}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

Donc : $P(Z) = 0$ admet un imaginaire pur $z_0 = -i$

2) $z_0 = -i$ est une racine de $P(z)$

donc : $P(z)$ est divisible par : $z + i$

$$\text{donc : } P(Z) = (z+i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$P(Z) = z^3 + (i+\alpha)z^2 + (\alpha i + \beta)z + \beta i$$

$$\text{Et on a : } P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$$

$$\text{Donc : } \alpha = -16 \text{ et } \beta = 89$$

$$\text{Donc : } P(Z) = (z+i)(z^2 - 16z + 89)$$

$$\text{On va résoudre l'équation : } z^2 - 16z + 89 = 0$$

$$\Delta = -100 \quad \text{donc : } z_1 = 8 - 5i \text{ et } z_2 = 8 + 5i$$

$$\text{Donc : les solutions de (E) : } S = \{-i; 8 - 5i; 8 + 5i\}$$

$$\text{Exercice17 : soit : } z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

$$2) \text{en déduire : } \cos \frac{11\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{11\pi}{12}$$

$$\text{Solution :1) } z = e^{-i\pi} \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \pi} = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

$$z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = -\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$z = \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

$$2) \sin \frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \text{ et } \cos \frac{-11\pi}{12} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

$$\text{Donc : } \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \text{ et } \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

Exercice18 : déterminer Les racines 4ème de l'unité

Solution : Les racines 4ème de l'unité sont :

$$u_k = e^{\frac{k\pi}{2}i} \quad \text{Où } k \in \{0,1,2,3\}$$

$$1) u_0 = e^{\frac{0\pi}{2}i} = e^0 = 1 \quad 2) u_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$3) u_2 = e^{\pi i} = -1 \quad 4) u_3 = e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$$

Exercice19 : Ecrire sous les formes algébriques les racines 6ième de l'unité.

Exercice 20: Considérons l'équation : (E) :

$$z^6 = \bar{z} \quad 1) \text{Montrer que si } z \neq 0 \text{ et } z \text{ solution de (E)}$$

$$\text{Alors } |z| = 1$$

2- Résoudre l'équation (E)

Exercice 21 :

$$1) \text{ Résoudre dans } \mathbb{C} \text{ l'équation : } z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

2) Ecrire les solutions sous leurs formes algébriques et déterminer :

$\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice22 :1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - \sqrt{3}iz - 1 - \sqrt{3}i = 0$$

2) En déduire sous les formes trigonométriques et algébriques les solutions de l'équation :

$$z^6 - \sqrt{3}iz^3 - 1 - \sqrt{3}i = 0$$

Exercice23 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère les points : A ; B ; C d'affixe

respectivement $z_A = 3 + 5i$; $z_B = 3 - 5i$; $z_C = 7 + 3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la

translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4 - 2i$

1) montrer que : $z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u})

2) vérifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la

translation $t_{\vec{u}}$

Solution:1) $T(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

$\Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u})

2) on a : $z_A = 3 + 5i$

Donc : $z' = 3 + 5i + 4 - 2i$

Donc : $z' = 7 + 3i = z_C$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) on a : $z_B = 3 - 5i$ Donc : $z' = 3 - 5i + 4 - 2i$

$$\Leftrightarrow z' = 7 - 7i = z_{B'}$$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation

$t_{\vec{u}}$ est $z_{B'} = 7 - 7i$

Exercice24:

1- Donner l'écriture complexe de la translation

$t_{\overline{AB}}$ qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du Point C($-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$)

par la translation $t_{\overline{AB}}$.

Exercice25 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère les points : A d'affixe $z_A = 3 + 5i$ et soit

z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie

de centre $\Omega(3; -2)$ et de Rapport $k = 4$

1) montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture

complexe de l'homothétie $h(\Omega, k)$)

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par

l'homothétie $h(\Omega, k)$

Solution:1) $h_{(\Omega; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_{\Omega}(1 - k)$$

$$\Leftrightarrow z' = 4z + z_{\Omega}(1 - 4) \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3 - 2i)$$

$$\Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i$$

2) on a : $z_A = 3 + 5i$ et $z' = 4z - 9 + 6i$

Donc : $z' = 4(3 + 5i) - 9 + 6i$

Donc $z_{A'} = 3 + 26i$

Exercice 26:

1- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du point C($-1+5i$) par

l'homothétie h .

Exercice27 : Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ; B d'affixe

respectivement $z_A = 7 + 2i$; $z_B = 4 + 8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de $M(z)$ par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_c = 10 + 11i$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha} (z_M - z_B) + z_B$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) (z - 4 - 8i) + z$$

$$\Leftrightarrow z' = i(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 4i + 12$$

2) on a : $z_A = 7 + 2i$

$$\text{Donc : } z' = i(7 + 2i) + 4i + 12$$

$$\text{Donc : } z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10 \text{ cqfd}$$

Exercice 28: Déterminer l'écriture complexe de la

rotation r de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha} (z - z_\Omega) + z_\Omega$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{4}} (z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) (z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i) z + \sqrt{2} + 1 + i$$

Exercice 29 : Soit la rotation r de centre $\Omega(i)$ et

transforme O en $O' \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha} (z - z_\Omega) + z_\Omega$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta} (z - i) + i$$

Et puisque : $r(O) = O'$ alors : $\frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{i\theta} (0 - i) + i$

$$\Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{\sqrt{3} + i}{0 - i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Donc : } \theta \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi]$$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

Exercice 30 :

1- Montrer qu'il existe une rotation R de centre $\Omega(3+i)$ qui transforme $A(2+4i)$ en $B(6+2i)$

2- Donner l'écriture complexe de la rotation R

3- Déterminer l'image de $C(-1+3i)$

Exercice 31: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a : Le point $\Omega(\omega)$ est

un point invariant par f : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{3} = 1-i$

$$\text{D'où : } \begin{cases} z' = -2z + 3 - 3i \\ \omega = -2\omega + 3 - 3i \end{cases} \text{ en faisant la différence on}$$

obtient : $z' - \omega = -2(z - \omega)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ Donc : f est l'homothétie de centre $\Omega(\omega = 1 - i)$ et de Rapport -2

Exercice 32 : Soit u un complexe non nul, et f la transformation plane qui transforme $M(z)$ en

$M'(z')$ tel que : $z' = uz + i - \bar{u}$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivant : 1) $u = 1$ 2) $u = -3$

$$3) u = j$$

$$4) u = 4 - 4\sqrt{3}i$$

Exercice 33 : Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point : A (i) et la

rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1

la rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$

et ses éléments caractéristiques

Solution : soit un point M (z)

On pose : $R_0(M) = M'(z')$ et $R_1(M') = M''(z'')$

$$R_0(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O) + z_O$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z \quad \text{Car } z_O = 0$$

Et on a : $R_1(M') = M''(z'') \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z' - z_A) + z_A$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}}z - i \right) + i \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}z + i \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + i \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \Leftrightarrow z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On sait que la composée de deux rotation est une

rotation $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi \right)$

Déterminons le centre de la rotation : $R_1 \circ R_0$?

Le centre de la rotation est le point invariant :

$$\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \omega(1-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Donc : } \omega = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

On a : $\arg i = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

L'angle de la rotation est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 34 : soit ABC un triangle isocèle et

rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

et soit R la rotation de centre A et qui transforme

B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

Solution : on considère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme

repère normé donc : L'angle de la rotation R

est : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

donc : R la rotation de centre A (0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc : $R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

Donc l'écriture complexe de la rotation R est .

$$R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = iz$$

l'écriture complexe de la translation translation

$$T = t_{\overrightarrow{AB}} \text{ est : } z'' = z + 1$$

soit un point M (z) : on pose : $F_1(M) = M_1(z_1)$

et $F_2(M) = M_2(z_2)$

on a donc : $z_1 = i(z + 1)$ et $z_2 = iz + 1$

on a : pour F_1 : $z = i(z + 1) \Leftrightarrow (1 - i)z = i$

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$$

pour F_1 le seul point invariant est

$$\Omega_1 \left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2} \right) \text{ et on a :}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + \omega_1 \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$$

donc F_1 est la rotation de centre $\Omega_1 \left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2} \right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

De même : pour F_2 le seul point invariant est

$$\Omega_2 \left(\omega_2 = \frac{1+i}{2} \right) \text{ et on a : } z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i} z + \omega_2 \left(1 - e^{\frac{\pi}{2}i} \right)$$

donc F_2 est la rotation de centre : $\Omega_2 \left(\omega_2 = \frac{1+i}{2} \right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 35 : Exercice 35 : Dans le plan

complexe direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point : A

(2) et soit φ une transformation qui transforme

$$M(z) \text{ en } M_2(z_2) \text{ tel que } z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et}$$

soit H l'homothétie de centre A (2) et de

$$\text{Rapport } k = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Et soit : $f = \varphi \circ H$

1) montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle

2) montrer que $f \circ H^{-1} = \varphi$

Solution :1)

On a : $A = \varphi(A)$ à vérifier (A est le seul point invariant par φ) donc : l'écriture complexe de

$$\text{l'homothétie } H \text{ est : } z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(z-2) + 2$$

Pour tout point $M(z)$ soit $f(M) = M'$ et $M'(z')$

$$\text{On a : } z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et on peut l'écrire}$$

$$\text{sous forme: } z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z_1 - 2)$$

$$\text{et puisque: } z_1 - 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(z - 2)$$

$$\text{alors : } z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \frac{2}{\sqrt{3}}(z - 2)$$

$$\text{Donc: } z' - 2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z - 2) \text{ et puisque: } \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\text{alors : } z' - 2 = e^{\frac{\pi}{6}i}(z - 2)$$

donc : f est une rotation de centre A (2)

d'angle $\frac{\pi}{6}$

$$2) \text{ puisque: } f = \varphi \circ H \text{ alors: } f \circ H^{-1} = (\varphi \circ H) \circ H^{-1}$$

cad $f \circ H^{-1} = \varphi \circ (H \circ H^{-1})$ et et puisque:

$$H \circ H^{-1} = I_P \text{ alors: } f \circ H^{-1} = \varphi$$

finalement φ est la composée de la rotation de

centre A (2) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'homothétie H de

centre A (2) et de Rapport $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 36 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un complexe non nul ; Pour tout nombre

$$z \text{ de } \mathbb{C} \setminus \{a\}, \text{ on pose : } f_a(z) = z' = \frac{az}{z-a}$$

1. Montrer que :

$$f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$$

2. Soit z un élément de $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$

on pose : $|z - a| = r$ et $\arg(z - a) \equiv \theta [2\pi]$

a. Calculer $|f_a(z) - a|$ en fonction de r est $|a|$

b. Calculer $\arg(f_a(z) - a)$ en fonction de θ et r .

3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M(z)$ définis par :

$$(D) = \{M(z); \arg(z - a) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]\}$$

$$(C) = \{M(z); |f_a(z) - a| = 2\}$$

$$(E) = \{M(z); f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$$

a) Déterminer les ensembles (E) et (C) et montrer que (D) est une demi droite d'origine $A(a)$ privée de A et déterminer son équation cartésienne.

b) soit z_0 un élément de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, et $B(z_0)$

tel que $B \in (D) \cap (C)$; écrire $f_a(z_0)$ sous sa forme

algébrique puis déterminer z_0

c) Construire les ensembles (D) ; (C) et (E) .

4) Déterminer la représentation complexe de la rotation ρ de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$

5) Déterminer la représentation complexe de la translation t de vecteur \vec{u} d'affixe a .

6. Déterminer la transformation $t \circ \rho$ et ses éléments caractéristiques.

Exercice 37 : soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$

Solution : soit $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$|z-1| = |z - |z| + (|z|-1)| \leq |z - |z|| + ||z|-1|$$

On pose : $z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$

$$\text{On a : } |z - |z|| = |Re^{i\theta} - R| = R|e^{i\theta} - 1|$$

$$= R \left| \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} \right| = R \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \right|$$

$$\text{Donc : } |z - |z|| = 2R \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

Or on sait que : $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } |z - |z|| \leq |z| |\theta| = |z| |\arg z|$$

$$\text{Donc : } |z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$$

Exercice38 : soit a et b et c des nombres

complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$

et $a \neq c$ et $b \neq c$

$$1) \text{ Montrer que : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ en déduire que : } \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Solution : } \overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}} \right)^2 \times \frac{\bar{a}}{b}$$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{1-\frac{1}{c}}{1-\frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{1}{b} = \left(\frac{b-c}{bc} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{1-\frac{1}{c}}{1-\frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{1}{b} = \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ puisque : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R} \text{ alors :}$$

$$\arg \left(\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \right) \equiv 0[\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 + \arg \left(\frac{a}{b} \right) \equiv 0[\pi]$$

$$\text{Donc : } 2 \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right) [\pi]$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Exercice39 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\text{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

Solution : on a : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7 = 1$

$$1) \bar{S} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4$$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\bar{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \text{ et on a } z^7 = 1$$

$$\text{Donc : } z^6 = \frac{1}{z} \text{ et } z^5 = \frac{1}{z^2} \text{ et } z^3 = \frac{1}{z^4}$$

$$\text{Donc : } \bar{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} = z^3 + z^5 + z^6 = T$$

Donc : les nombres S et T sont conjugués

2) Montrons que : $\text{Im}(S) > 0$?

$$\text{On a : } S = z + z^2 + z^4 \text{ et } z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$$

$$\text{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$\text{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} \text{ puisque : } \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } \sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{2\pi}{7} \text{ et on a } \sin\frac{4\pi}{7} > 0$$

$$\text{Donc : } \text{Im}(S) > 0$$

3) calculons $S+T$ et $S \times T$?

$$S+T = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

$$S+T = (1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6) - 1$$

$$S+T = \frac{1-z^7}{1-z} - 1 = -1 \text{ car } z^7 = 1$$

$$S \times T = (z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$$

$$S \times T = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$$

$$S \times T = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$$

$$\text{On a } z^7 = 1 \text{ donc : } z^8 = z \text{ et } z^9 = z^2 \text{ et } z^{10} = z^3$$

$$\text{donc : } S \times T = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 2$$

$$S \times T = \frac{1-z^7}{1-z} + 2 = 2 \text{ car : } z^7 = 1$$

4) on a $S+T = -1$ et $S \times T = 2$ donc S et T sont

les solutions de l'équation : $x^2 + 1x + 2 = 0$

$$\Delta = -7 = (\sqrt{7}i)^2$$

En résolvant l'équation on trouve :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \text{ et on a } \text{Im}(S) > 0$$

$$\text{Donc : } S = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \text{ et } T = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

Exercice40 : Soit

$$P(z) = (i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i$$

1) Montrer que l'équation (E) : $P(z) = 0$ admet un

imaginaire pur z_0 unique comme solution

2) déterminer les nombres complexes $a; b; c$ tels

que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Solution : 1) soit $z_0 = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une solution

imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$ donc :

$$(i-1)z_0^3 - (5i-11)z_0^2 - (43+i)z_0 + 9 + 37i = 0$$

$$(i-1)(\lambda i)^3 - (5i-11)(\lambda i)^2 - \lambda i(43+i) + 9 + 37i = 0$$

Donc :

$$(\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9) + i(\lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 = 0 \\ \lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37 = 0 \end{cases}$$

On remarque que 1 est l'unique solution du système donc : $z_0 = i$ est la solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$

2) $z_0 = i$ est une racine de $P(z)$ donc $P(z)$

Est divisible par $z - i$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par $z - i$

on trouve :

$$P(z) = (z - i)((i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i)$$

Donc : $a = i - 1$ et $b = 10 - 6i$ et $c = -37 + 9i$

3)

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)((i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i) = 0$$

$$\Leftrightarrow (i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i = 0 \text{ ou } z - i = 0$$

On va résoudre l'équation :

$$(i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i = 0 \text{ (F)}$$

$$\Delta' = (5-3i)^2 - (i-1)(-37+9i) = -12 + 16i$$

$$\Delta' = -12 + 2 \times 4 \times 2i = (4i)^2 + 2 \times 2 \times 4i + (2)^2 = (2+4i)^2$$

Donc : une racine carrée de Δ' est : $2 + 4i$

Donc : les solutions de (F) sont :

$$z_1 = 5 - 2i \text{ ou } z_2 = 3 + 4i$$

Donc les solutions de (E). sont :

$$S = \{5 - 2i; 3 + 4i; i\}$$

Exercice 41 : Soit dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$$

1) Montrer que l'équation (E): $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 à déterminer

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Solution : 1) soit $z_0 = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une solution réelle de l'équation (E). donc :

$$2\lambda^3 - (1+2i)\lambda^2 + (25i-1)\lambda + 13i = 0$$

$$\text{Donc : } (2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda) + i(-2\lambda^2 + 25\lambda + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0 \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ ou } \lambda = 1 \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \end{cases}$$

On remarque que $\lambda = -\frac{1}{2}$ le seul vérifiant

$-2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0$ donc solution du système

donc : $z_0 = -\frac{1}{2}$ est la solution réelle de

L'équation (E)

2) on pose :

$$P(z) = 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i$$

$z_0 = -\frac{1}{2}$ est une racine de $P(z)$

donc $P(z)$ est divisible par $z + \frac{1}{2}$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par

$z + \frac{1}{2}$ on trouve :

$$P(z) = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z^2 - (1+i)z + 13i)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow 2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z^2 - (1+i)z + 13i) = 0$$

On va résoudre l'équation :

$$z^2 - (1+i)z + 13i = 0 \quad (F)$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 52i = -50i = (5(1-i))^2$$

Donc : une racine carrée de Δ est : $5(1-i)$

Donc : les solutions de (F) sont :

$$z_1 = -2 + 3i \text{ ou } z_2 = 3 - 2i$$

Donc les solutions de (E) sont :

$$S = \left\{ -2 + 3i; 3 - 2i; -\frac{1}{2} \right\}$$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices Que l'on devient un mathématicien*

