

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice1 : soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution g qui vérifie :

$$g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 2$$

solution : ($w = 2$) 1) la solution générale de

l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$ où a et b sont des réels

$$2) F'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme : $F(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice2 : Résoudre les équations différentielles suivantes : 1) $(E_1): y' = 3y$ 2) $(E_2): y' - y = 0$

Solution : 1) La solution générale de l'équation différentielle (E_1) : est l'ensemble des fonctions :

$$x \rightarrow y(x) = \lambda e^{3x} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel.}$$

$$2) (E_2): y' - y = 0 \Leftrightarrow (E_2): y' = y$$

La solution générale de l'équation différentielle (E_2) : est

l'ensemble des fonctions : $x \rightarrow y(x) = \lambda e^x$ où λ est un réel.

Exercice3 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2y' - 4y - 3 = 0$$

Solution : $(E) : 2y' - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y' = 4y + 3$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{4y + 3}{2} \Leftrightarrow y' = 2y + \frac{3}{2}$$

$$\text{on a donc ; } a = 2 \text{ et } b = \frac{3}{2}$$

La solution générale de l'équation différentielle (E) : est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{3}{4} \quad \text{Où } \lambda \text{ est un réel.}$$

Exercice4 : soit l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \frac{1}{2} y' + 3y - 1 = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f'(0) = -2$.

Solution : 1) $(E) : \frac{1}{2} y' + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' = -6y + 2$

Donc : $a = -6$ et $b = 2$

La solution générale de l'équation différentielle (E) : est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-6x} + 3 \quad \text{Où } \lambda \text{ est un réel.}$$

2) $f(x) = \lambda e^{-6x} + 3$ On va calculer : $f'(x)$

$$f'(x) = (\lambda e^{-6x} + 3)' = -6\lambda e^{-6x}$$

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow -6\lambda e^0 = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Donc : $f(x) = \frac{1}{3} e^{-6x} + 3$ c'est la solution de (E) qui vérifie la condition initiale

Exercice5 : Considérons les équations différentielles

$$(E_0): y' - y = 0 \text{ et } (E) : y' - y = 2x^2 + x$$

1- Résoudre l'équation différentielle (E_0)

2- a) Soit P une fonction polynôme, quel sera le degré de P afin que P soit une solution de (E)

b) Déterminer le polynôme P pour que P soit une solution de (E)

c) Montrer que : y est solution de (E) si et seulement si $(y - P)$ est solution de (E)

d) En déduire la solution générale de l'équation (E)

3) déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 2$

Exercice6 : 1) Résoudre l'équation différentielle

$$\text{suivante : } (E) : y'' - 7y' + 12y = 0$$



2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

$$(E_1): r^2 - 7r + 12 = 0$$

On a : $\Delta = 1$ donc l'équation (E₁) a deux racines : r_1 et r_2

réelles et distinctes : $r_1 = 3$ et $r_2 = 4$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$y(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$$

$$f'(x) = (\alpha e^{4x} + \beta e^{3x})' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc : $f(x) = e^{4x} - e^{3x}$ c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exercice7 :1) Résoudre l'équations différentielle

suiivante : (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

$$(E_1): r^2 - 2r + 1 = 0$$

On a : $\Delta = 0$ donc l'équation (E₁) admet une racine double

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = 1$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^x \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$$

$$f'(x) = ((\alpha x + \beta)e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta)(e^x)'$$

$$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc : $f(x) = (1x + 0)e^x$ donc : $f(x) = xe^x$

C'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales.

Exercice8 :1) Résoudre l'équations différentielle

suiivante : (E) : $y'' - 4y' + 13y = 0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

$$(E_1): r^2 - 4r + 13 = 0 \text{ On a : } \Delta = -36 = (6i)^2$$

donc l'équation (E₁) a deux racines z_1 et z_2 complexes

conjugués et on a : $z_1 = \frac{4+i6}{2}$ et $z_2 = \frac{4-i6}{2}$ donc

$$z_1 = 2 + 3i = p + iq$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x) = e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$ où α et β réels

$$2) f(x) = e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$$

$$f'(x) = (e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x))'$$

$$= (e^{2x})' (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)'$$

$$= 2e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x} (-3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x} (2\alpha \cos 3x + 2\beta \sin 3x - 3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x} ((2\alpha + 3\beta) \cos 3x + (2\beta - 3\alpha) \sin 3x)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(x) = e^{2x} \left(0 \times \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x$$

c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exercice9 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) y' = 7y - 5 \quad \text{avec } y(0) = -6$$



2) $y'' - 15y' + 56y = 0$ avec : $y'(0) = 9$; $y(0) = -3$

3) $y'' + 14y' + 49y = 0$ avec : $y'(0) = 6$; $y(0) = -3$

4) $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$ avec : $y'(0) = 6$; $y(0) = -4$

Solutions : 1) $y' = 7y - 5$ Donc les solutions de

l'équation (E) sont les fonctions :

$$y(x) = \lambda e^{7x} + \frac{5}{7} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

On a : $y(0) = \lambda + \frac{5}{7} = -6$ donc : $\lambda = -\frac{47}{7}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions

initiales est : $y(x) = -\frac{47}{7}e^{7x} + \frac{5}{7}$

2) $y'' - 15y' + 56y = 0$ avec : $y'(0) = 9$; $y(0) = -3$

L'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 - 15r + 56 = 0 \text{ donc : } r_1 = 7 \text{ et } r_2 = 8$$

Donc : $y(x) = \alpha e^{7x} + \beta e^{8x}$ où α et β réels

Donc : $y'(x) = 7\alpha e^{7x} + 8\beta e^{8x}$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha + \beta \\ y'(0) = 7\alpha + 8\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 9 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ 7\alpha + 8\beta = 9 \end{cases}$ donc : $\beta = 30$; $\alpha = -33$ Donc : la

solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est :

$$y(x) = -33e^{7x} + 30e^{8x}$$

3) $y'' + 14y' + 49y = 0$ avec : $y'(0) = 6$; $y(0) = -3$

L'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 + 14r + 49 = 0 \text{ donc : } r = -7$$

Les solutions : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-7x}$

$$y'(x) = \alpha e^{-7x} - 7(\alpha x + \beta)e^{-7x}$$

$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \beta \\ y'(0) = \alpha - 7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha - 7\beta = 6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha = -15$; $\beta = -3$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions

initiales est $y(x) = (-15x - 3)e^{-7x}$

4) $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$ avec : $y'(0) = 6$; $y(0) = -4$

L'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 + r + \frac{5}{2} = 0 \text{ on trouve : } z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ et } \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Donc : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$

où α et β réels

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

$$+ \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

$$\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha = -4$; $\beta = \frac{8}{3}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-4 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

Exercice10 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $2y'' + y' - 3y = 0$ 2) $y'' + 2y' + 2y = 0$

3) $y'' + 4y' + 4y = 0$ 4) $y'' + 2y = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien

