Exercices d'applications et sur les espaces vectoriels

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

http://www.xriadiat.com

Exercices
Espaces vectoriels

Exercice1 : Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur [0, 1], continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour les mêmes opérations.

(c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que : f (3) = 7.

Exercice2 : dans l'espace vectoriel $(V_2;+;.)$ déterminer le scalaire α et le vecteur $\vec{u}$ tel que : $(3\alpha^2-5\alpha+2)\vec{u}=\vec{0}$

Exercice3: on considére l'ensemble : $F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}$

Montrer que F est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

Exercice4 : on considére l'ensemble : $F=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b\end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : on considére l'ensemble : $F=\left\{\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a\end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice6 : dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ on considére les matrices : $M_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$ est-ce que la matrice : $M=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices : M_1 et M_2 ?

Exercice7 : dans : $(\mathbb{R}^2;+;.)$ on considére les Vecteurs : $\vec{x}_1=(1;-2)$ et $\vec{x}_2=(5;1)$ et $\vec{x}_3=(-7;2)$

Est-ce que le vecteur : $\vec{x}_3$ est une combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$?

Exercice8 : dans $(\mathbb{R}_n[X];+;.)$ l' espace vectoriel des polynômes de degrés inferieur a 2 on considére les polynômes : $P_1(x)=x^2-x$; $P_2(x)=1+x^2+x$ et $P_3(x)=8-x^2$

Est-ce que le polynôme : $P(x)=-2x^2-2x+15$ est une combinaison linéaire des polynômes : $P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$?

Exercice9: Soit E = $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ .Alors la fonction f définie par :
$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x) = x^3-2x^2-7x-4$
Montrer que f est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3

Exercice10: dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$On considére la famille :

$B=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right)$ et on considére la

matrice : $M=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 10 & -4\end{pmatrix}$

Montrer que la matrice M est engendré par la famille B

Exercice11:dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;.)$ on considére les vecteurs :

$\vec{x}_1=(3;2)$ et $\vec{x}_2=(1;5)$ et la familleB=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$)

Montrer que la famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$) engendre

l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$

Exercice12: On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.
Soient $F_1 = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
$F_2 =\{ (\lambda - 3\mu, 2\mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
$F_3 =\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ et
$F_4 =\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0$ et
$2x + 5y + z = 0\}$
Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Exercice13:dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3;+;.)$ on considére la famille :

$B=(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$tel que : $\vec{u}=(\cos a;\cos b;\cos c)$

$\vec{v}=(\sin a;\sin b;\sin c)$ et

$\vec{w}=(\sin(x+a);\sin(x+b);\sin(x+c))$

Avec ; $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

Montrer que la famille B est liée

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien