CALCULS INTEGRALES : **Exercices d'applications**

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM

http://www.xriadiat.com

TD : CALCULS INTEGRALES

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x dx$ **2)** $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1} dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13 $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1| dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

Exercice4 : on pose: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

Calculer $I+J$ et $I-J$ et en déduire I et J

Exercice5 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2 - e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

Exercice 6: Calculer l' intégrale suivante :

$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$

Exercice7 :on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Exercice8 :d'application Soit f : $x \to e^{-x^2}$

Définie sur R.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$F(a) = \int_1^a f(x) dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$0 \leq F(a) \leq e^{-1}$.

Exercice9 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Exercice10 :soit la suite numérique (u_n)définie

par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n)est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice11 : soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in [0;1]$: $\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$

2) En déduire: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

Exercice12 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ 2) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

3) $C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Exercice13 : Calculer l' intégrale suivante :

1) $I = \int_0^{\pi} x\sin x dx$ 2) $J = \int_0^{\ln 2} xe^x dx$

3) $K = \int_1^e \ln x dx$

Exercice14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

1) $I = \int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K = \int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

5) $M = \int_1^e (x\ln x)dx$ 6) $N = \int_1^e \cos(\ln x)dx$

Exercice15 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

$K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$

$M = \int_1^e x(1-\ln x)dx$ $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$R = \int_1^e x\ln x dx$ $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

Exercice16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3}dx$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice17 : En utilisant une intégration par changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

Exercice18 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Exercice19 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$

1)tracer Cf la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Exercice20 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Exercice21 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$
Soit f et g deux fonctions tels que:

$f(x)=\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Exercice22 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^2-8x+12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3;f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Exercice 23: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice24 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Exercice25 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\frac{xe^{x}+x+1}{e^{x}+1}$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice26 : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Exercice27 : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\sqrt{x(e^{x}-1)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Exercice28: $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{\ln x}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice29: $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définit par :
$f(x)=x\sqrt{1-lnx}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice30: En utilisant les somme de Riemann calculer : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

Exercice31:
En utilisant les somme de Riemann calculer :

1) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 2) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$

3) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Exercices 32 :

1)Calculer les limites des sommes suivantes :

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}} \quad \text{et} \quad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par partie : $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire ln dans l'expression de u_n)

Exercice33: Déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

Exercice34: étudier la dérivabilité de la fonction F définit par : $F(x)$ = $\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et

calculer $F'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

Exercice35: soit la fonction F définit par :

$F(x)$ = $\int_0^{x^2+2x}\sqrt{1+t}\,dt$ $\forall x\in[-1;+\infty[$

1)Étudier la dérivabilité de la fonction F et calculer $F'(x)$ $\forall x\in[-1;+\infty[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Exercice36: étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)$ = $\int_0^x e^{t^2}\left(t^2-4\right)dt$

Exercice37: soit h la fonction définie sur :

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $h(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$

et $h(0)=e^2$

1)Montrer que h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et en déduire que :

$H:x\to\int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)calculer : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$

Exercice38: Soit la fonction f définie sur]1, +∞[par $(\forall t\in]0,+\infty[)\ (f(t)=e^{\frac{1}{\ln t}}$

1) Etudier les variations de f sur]1, +∞ [.
2) Considérons la fonction définie sur]1, +∞ [par : $F(x)$ = $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$

a) Montrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)$:
$(f(x+1)\leq F(x)\leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)(e^t\geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x>1)$: ln

$F(x)-1\geq\int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt$

4)a) Montrer que : $(\forall t\in]0,+\infty[)(\ln t\leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x>1)(F(x)-1\geq\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) En déduire $\lim_{x\to 1^+}F(x)$

5) Montrer que F est dérivable sur]1, +∞ [et calculer $F'(x)$ pour $x>1$
6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F
7) Construire la courbe CF.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien