Exercices d'applications et de réflexions : *FONCTIONS LOGARITHMIQUES*

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM BIOF

http://www.xriadiat.com

TD -FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Exercice1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to ln(x+1)$ 2) $g : x \to ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $h : x \to \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

5) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : 1) $ln(x-2) = 0$

2) $ln(3x-1) = ln(5x-10)$ 3) $ln(2x-1) - ln(1-x) = 0$

4) $ln(2x) = ln(x^2+1)$ 5) $ln(2x-6) \geq 0$

6) $ln(x-1) - ln(3x+1) < 0$

Exercice3 : On pose $l\,n(2) \simeq 0,7$ et $l\,n(3) \simeq 1,1$

Calculer: $l\,n(6)$; $l\,n(4)$; $l\,n(8)$; $l\,n(72)$

$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)$; $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)$; $l\,n(\sqrt{2})$; $l\,n(\sqrt{6})$; $l\,n(3\sqrt{2})$

$ln(12\sqrt[3]{3})$; $A = ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$B = \frac{1}{4}ln81 + ln\sqrt{3} - ln\frac{1}{27}$ et $C = ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2015} + ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$

Exercice4 : On pose $\alpha = ln(a)$ et $\beta = ln(b)$
Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$\ln(a^2b^5)$ et $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

Exercice5 : simplifier et calculer :

$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $ln(2x-1) = \frac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

3) $3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$ 4) $\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$

5) $lnx + ln(x-1) - l\,n2 = l\,n3$

6) $ln(2x+5) + ln(x+1) \leq ln4$

7) $ln(14-x) \succ ln(10+7x-3x^2)$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$

Exercice8 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to \frac{ln(x+1)}{ln(\ln x)}$ 2) $g : x \to \sqrt{1 - ln(e-x)}$

3) $h : x \to \frac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2 - 1}}$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} (ln^2(x) - lnx)$

3) $\lim_{x\to+\infty} x - lnx$ 4) $\lim_{x\to0^+} ln^2(x) + lnx$

5) $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} + lnx\right)$ 6) $\lim_{x\to0^+} x^4 \log x$

7) $\lim_{x\to0^+} 2x - x^3\ln x$ 8) $\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

9) $\lim_{x\to0^+} x(ln(x))^2$ on pose : $X = \sqrt{x}$

10) $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$ 11) $\lim_{x\to0^+} x^2\left(\ln x\right)^5$

Exercice10 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$f\left(x\right)=\ln\left(3x^2+5\right)$

Exercice11 :calculer la dérivée des fonctions définies par :1) $f\left(x\right)=x^2-\ln x$ 2) $f\left(x\right)=x\ln x$

3) $f\left(x\right)=\ln\left(1+x^2\right)$

Exercice12 :calculer la dérivée de la fonction définie sur $I=\left]-2;+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}$

Exercice13 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f\left(x\right)=\ln\left|\ln|x|\right|$

2) $f\left(x\right)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

Exercice14 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^4+2}$ 2) $I=\left]0;1\right[;\ g\left(x\right)=\frac{1}{xlnx}$

3) $I=\left]-\infty;1\right[;h\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$ 4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;k\left(x\right)=\frac{\cos x}{\sin x}$

5) $M\left(x\right)=\frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g\left(x\right)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ où a et b des réels à déterminer).

6) $N\left(x\right)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

7) $I=\left]3;+\infty\right[;q\left(x\right)=\frac{1}{\left(x-2\right)\ln\left(x-2\right)}$

Exercice 15 : Considérons la fonction f définie par : $f\left(x\right)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que : $\left(\forall x\in D\right);\ f\left(x\right)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

2) En déduire la fonction primitive de f sur $\left]-\infty;-2\right[$ Tel que $F\left(-3\right)=\ln 2$

Exercice 16 : simplifier et calculer :

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A=\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2\left(10\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

Exercice17 : On pose $\alpha=\log_{40}\left(100\right)$ et $\beta=\log_{16}\left(25\right)$ Calculer β en fonction α

Exercice18 : simplifier et calculer :

1) $\log_{10}100$ 2) $\log_{10}0,0001$

3) $A=\log\left(250000\right)+\log\sqrt{250}-\log\left(125\right)$

Exercice 19 : déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq10^{20}$

Exercice 20 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\log_3\left(2x\right)\times\left(\log_5\left(x\right)-1\right)=0$

2) $2\left(\log x\right)^2-19\log x-10=0$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq1$

4) $\log_{2x}\left(4x\right)+\log_{4x}\left(16x\right)=4$

Où $\log$ est le logarithme décimal

Exercice 21 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_3\left(7x-1\right)^2=0$ 2) $\log_3\left(5x+1\right)=2$

3) $\frac{\log_3\left(5x+1\right)}{\log_3\left(7x-1\right)^2}\leq1$

Exercice 22: A) soit la fonction g définie par : $g\left(x\right)=x-lnx$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

3) en déduire que : $\forall x > 0 \qquad x > lnx$

B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + lnx}{x - lnx} ; si..x \succ 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1)Montrer que $D_f = [0;+\infty[$

2)Montrer que f est continue à droite de 0

3)calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{2(1 - lnx)}{(x - lnx)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7)déterminer les points d'intersections de C_f et la Droite : $(\Delta): y = 1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($ln2 \approx 0,7$, $e \approx 2,7$)

Exercice 23 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1)a)calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-1^+} g(x)$

b) montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x) = (1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)}\right)$$

et en déduire : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

c) Etudier les variations les fonctions f et g Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

4)monter que : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 24 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2)montrer que le domaine d'étude de f est : $D_E =]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

6). Construire la courbe (C_f) dans D_E

Exercice 25 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_x (x+1) = \log_{x+1} (x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\log_2(x) > \log_x(2)$

Exercice 26 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1) Déterminer l’ensemble de définition de la fonction f
2) Résoudre l’équation $f(x) = 1$
3) Résoudre l’inéquation $f(x) \leq 1$
4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e
5) Etudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J.
6) Construire dans le même repère Cf et $C_{f^{-1}}$

Exercice 27 : Considérons la fonction g définie par : $g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l’ensemble de définition de la fonction g
2. a) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté g

b) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g
5. Etudier les branches infinies de la courbe Cg.
6. Construire la courbe Cg

« C’est en forgeant que l’on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l’on devient un mathématicien