

## FONCTIONS LOGARITHMIQUES

### I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

#### 1) Existence :

**Activité :** Le but de cette activité est de montrer l'existence d'une fonction  $f$  non nulle qui vérifie les deux conditions suivantes :

- (1)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$
- (2)  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) (f(x \times y) = f(x) + f(y))$

1) Déterminons  $f(1)$  :

D'après (2) en prenant  $x = y = 1$  on obtient :  
 $f(1) = 2f(1)$  donc  $f(1) = 0$ .

2) Déterminons l'existence d'un réel  $k$  tel que :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) (f'(x) = \frac{k}{x}).$$

Pour tous  $x$  et  $y$  dans  $]0, +\infty[$

on pose :  $g_x(y) = f(x \times y)$  et  $h_x(y) = f(x) + f(y)$  ;

on a :  $g_x$  et  $h_x$  sont dérivable sur  $]0, +\infty[$  et :

$$(\forall y \in ]0, +\infty[) (g_x'(y) = x f'(xy) \text{ et } h_x'(y) = f'(y))$$

( $f(x)$  es une constante pour  $y$ )

$$\text{et puisque : } (\forall y \in ]0, +\infty[) (g_x'(y) = h_x'(y))$$

alors :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) (x f'(xy) = f'(y))$  pour  $y = 1$

$$\text{on trouve : } (\forall x \in ]0, +\infty[) (f'(x) = \frac{f'(1)}{x})$$

Donc la fonction qui vérifie les conditions est la

fonction primitive de la fonction  $\frac{f'(1)}{x}$  et qui

s'annule en 1

*Inversement :*

Considérons la fonction primitive  $f$  de  $x \rightarrow \frac{k}{x}$

sur  $]0, +\infty[$  et qui s'annule en 1 ; montrons que  $f$  vérifie les deux conditions

On a :  $f$  est dérivable  $]0, +\infty[$  (Définition de la fonction primitive).

Considérons les fonctions :

$$u_y(x) = f(x \times y) \text{ et } v_y(x) = f(x) + f(y)$$

on a  $u_y$  et  $v_y$  sont dérivable sur  $]0, +\infty[$  :

$$\forall x > 0; \forall y > 0 : u_y'(x) = y f'(x \times y) \text{ et } v_y'(x) = f'(x)$$

$$\text{et on a : } u_y'(x) = y \frac{k}{xy} = \frac{k}{x} = f'(x) = v_y'(x)$$

$$\text{donc : } \forall x > 0; \forall y > 0 \ u_y(x) = v_y(x) + c$$

Pour  $x = y = 1$  on aura :  $v(1) = u(1) + c$  et puisque  $u(1) = v(1)$  alors  $c = 0$ .

$$\text{D'où : } \forall x > 0; \forall y > 0 \ u_y(x) = v_y(x)$$

c-à-dire  $\forall x > 0; \forall y > 0$  on a :  $f(xy) = f(x) + f(y)$ .

**Propriété :** Les fonctions non nulles  $f$  qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (1)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$
- (2)  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) (f(x \times y) = f(x) + f(y))$

sont les fonctions primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{k}{x}$

Sur  $]0, +\infty[$  et qui s'annulent en 1.

### 2) Fonction logarithme Népérienne

#### 2.1 Définition et propriétés algébrique :

**Définition :** La fonction logarithme népérienne est

la fonction primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  sur

$]0, +\infty[$  et qui s'annule en 1 ; on la note par  $\ln$ .

**Conséquences immédiates :**

- 1)  $\ln$  est définie sur  $]0, +\infty[$
- 2)  $f(x) = \ln(u(x))$  est définie si et seulement si  $u(x) > 0$
- 3)  $\ln(1) = 0$
- 4)  $\ln$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

$$\text{et } (x \in ]0, +\infty[) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

**Monotonie :** On a :  $(x \in ]0, +\infty[) (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

Donc la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur

$]0, +\infty[$  on a donc 1)  $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

2)  $\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

**Applications1** : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1)  $f : x \rightarrow \ln(x+1)$     2)  $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2)$

3)  $h : x \rightarrow \frac{x}{\ln x}$     4)  $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

5)  $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$     6)  $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

**solution** :1)  $f(x) = \ln(x+1)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$$

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \text{ donc : } D_f = ]-1, +\infty[$$

2)  $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{3-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2-3x+2$	+	0	-	0	+

$$\text{Donc : } D_g = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$$

3)  $h(x) = \frac{x}{\ln x}$      $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\}$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ donc : } D_h = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

5)  $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

La fonction est définie ssi  $x > 0$  et  $x-1 > 0$  cad

$$x > 0 \text{ et } x > 1 \text{ donc : } D_k = ]1; +\infty[$$

6)  $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

La fonction est définie ssi  $\frac{x-4}{x+1} > 0$  et  $x+1 > 0$

On utilisant le tableau de signe on trouve :

$$D_m = ]-\infty, -1[ \cup ]4, +\infty[$$

**Applications2** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations

et inéquations suivantes :1)  $\ln(x-2) = 0$

2)  $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$     3)  $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$

4)  $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$     5)  $\ln(2x-6) \geq 0$

6)  $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

**Solution** :1)  $\ln(x-2) = 0$

a)cette équation est définie ssi :  $x-2 > 0$

$$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ donc : } D_E = ]2; +\infty[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln(1) \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow x \in D_E$$

$$\text{Donc : } S = \{3\}$$

2)  $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$

a) cette équation est définie ssi :  $5x-10 > 0$  et

$$3x-1 > 0 \text{ cad } x > 2 \text{ et } x > \frac{1}{3} \text{ donc : } D_E = ]2; +\infty[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \Leftrightarrow 3x-1 = 5x-10 \Leftrightarrow -2x = -9$$

$$\text{Donc : } \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \in D_E \text{ donc : } S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}$$

3)  $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$

a)cette équation est définie ssi :  $2x-1 > 0$  et

$$1-x > 0 \text{ cad } x > \frac{1}{2} \text{ et } x < 1$$

$$\text{donc : } D_E = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln(1-x)$$

$$2x-1 = 1-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \in D_E$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

4)  $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$

a)cette équation est définie ssi :  $2x > 0$  et

$$x^2 + 1 > 0 \text{ cad } x > 0 \text{ donc : } D_E = ]0; +\infty[$$

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in D_E \quad \text{Donc : } S = \{1\}$$

5)  $\ln(2x-6) \geq 0$

a) cette équation est définie ssi :  $2x-6 > 0$

$$2x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ Donc : } D_E = ]3; +\infty[$$

b) Résoudre l'inéquation :

$$\ln(2x-6) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x-6) \geq \ln 1 \Leftrightarrow 2x-6 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$$

$$\text{donc : } S = \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[ \cap ]3; +\infty[ = \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$$

6)  $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

a) cette équation est définie ssi :  $x-1 > 0$  et

$$3x+1 > 0 \text{ cad } \left(x > -\frac{1}{3}; x > 1\right) \text{ donc } D_I = ]1; +\infty[$$

b) Résoudre l'inéquation :

$$\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln(3x+1)$$

$$x-1 < 3x+1 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\text{Donc : } S = ]-1; +\infty[ \cap ]1; +\infty[ \text{ donc : } S = ]1; +\infty[$$

**La propriété caractéristique :**

$$(\forall x > 0; \forall y > 0)(\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y))$$

**Règles de calculs :**

- $(\forall x > 0)(\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x))$
- $(\forall x > 0; \forall y > 0)(\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y))$
- $(\forall x > 0; \forall r \in \mathbb{Q})(\ln(x^r) = r \ln(x))$
- $(\forall a > 0) \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- $(\forall a > 0) \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a \quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

**Exemples :** On pose  $\ln(2) \approx 0,7$  et  $\ln(3) \approx 1,1$

Calculer:  $\ln(6)$  ;  $\ln(4)$  ;  $\ln(8)$  ;  $\ln(72)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) ; \ln\left(\frac{3}{2}\right) ; \ln(\sqrt{2}) ; \ln(\sqrt{6}) ; \ln(3\sqrt{2})$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) ; A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}} ;$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27} \quad \text{et} \quad C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$$

**Solution :**

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 \approx 1,8$$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2\ln(2) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3\ln(2) \approx 3 \times 0,7 \approx 2,1$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2\ln(3) + 3\ln(2)$$

$$\ln(72) \approx 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 \approx 2,2 + 2,1 \approx 4,3$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \approx 1,1 - 0,7 \approx 0,4$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,7$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} \times 1,8 \approx 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \approx 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) \approx 1,1 + \frac{0,7}{2} \approx 1,1 + 0,35 \approx 1,45$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3 \times 2^2) + \ln(\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2\ln(2) + \ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2\ln(2) + \frac{1}{3} \ln(3) \approx 1,1 + 1,4 + \frac{1}{3} \times 1,1 \approx 2,86$$

$$A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}} = \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$$

$$A = \ln\left(\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27} = \frac{1}{4} \ln 3^4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{1}{3^3} = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3$$

$$B \approx 1,1 + \frac{1,1}{2} + 3 \times 1,1 \approx 4,95$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019} = \ln\left((\sqrt{2}+1)^{2019} \times (\sqrt{2}-1)^{2019}\right)$$

$$C = \ln\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^{2019} = \ln\left((\sqrt{2})^2 - 1^2\right)^{2019} = 2019 \ln(1) = 2019 \times 0 = 0$$

**Exercice1 :** On pose  $\alpha = \ln(a)$  et  $\beta = \ln(b)$

Calculer en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  les réels suivants :

$$\ln(a^2 b^5) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}$$

**Solution :**

$$\ln(a^2 b^5) = \ln(a^2) + \ln(b^5) = 2\ln a + 5\ln b = 2\alpha + 5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}} b^{-\frac{1}{6}}\right) = \ln a^{-\frac{7}{6}} + \ln b^{-\frac{1}{6}} = -\frac{7}{6} \ln a - \frac{1}{6} \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}\right) = -\frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{6}\beta$$

## 2.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction  $\ln$  on peut conclure que :

2.2.1)  $\ln$  est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

2.2.2) **Déterminons des limites référentielles :**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = ?$

Soit  $A$  un réel strictement positif. Comme la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et que  $\ln(1) = 0$  alors :  $\ln(2)$  est un réel strictement positif. Par conséquent, le quotient :  $\frac{A}{\ln 2}$  est un réel strictement positif.

On appelle  $n$  le plus petit entier naturel tel que :

$$n \geq \frac{A}{\ln 2} \quad (\text{il suffit de prendre } n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1)$$

On multiplie par  $\ln 2$  qui est positif on aura :  
 $n \ln 2 \geq A \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq A$

Comme  $\ln$  est une fonction croissante, alors pour tout  $x$  tel que  $x \geq 2^n$  nous avons :  $\ln x \geq n \ln 2 \geq A$

Donc  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow \ln x > A)$  :

$$(B = \ln 2^n \text{ où } n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1) \text{ Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty}$$

b) Déterminons :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

On pose :  $t = \frac{1}{x}$  si  $x \rightarrow 0^+$  alors  $t \rightarrow +\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{t} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = -\infty$$

$$\text{donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}$$

La droite  $(\Delta): x = 0$  est une asymptote verticale à la courbe  $(C_{\ln})$

c) Déterminons :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = ?$

En utilisant le T.A.F de la fonction  $\ln$  sur  $I = [1; \sqrt{x}]$

$$\text{On va montrer que : } 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$$

En effet la fonction  $\ln$  est continue, dérivable sur  $I$

D'après le T.A.F on donc :

$$\ln \sqrt{x} - \ln \sqrt{1} = \frac{1}{c}(\sqrt{x}-1) \leq \sqrt{x}-1$$

$$\text{Donc : } \ln x \leq 2(\sqrt{x}-1) \quad \text{Donc : } 0 < \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$$

$$\text{Et puisque on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = 0 \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$(\text{\AA} v\acute{e}rifier) \text{ alors : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

Donc la courbe  $(C_{\ln})$  admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$

**Propriété :** 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$     2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$     4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$  (où  $r \in \mathbb{Q}_*^+$ )

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$  (où  $r \in \mathbb{Q}_*^+$ )    6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

**Preuve :** 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$  où  $(n \in \mathbb{N}^*)$  ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \times 0 = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0)$$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) ?

Montrons d'abord que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$  ?

On pose  $t = \frac{1}{x}$  si  $x \rightarrow 0^+$  alors  $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0 \times 0 = 0$$

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$  ?

La fonction  $\ln$  étant dérivable en 1 alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  ?

On pose :  $t = x + 1$  et on applique : 6)

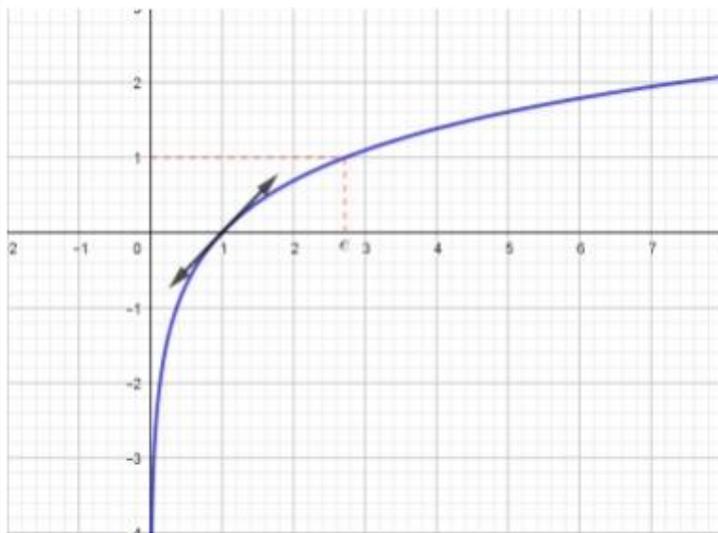
### 2.2.3) Le nombre $e$ :

La fonction  $\ln$  est continue strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et  $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ , donc le réel 1 a un antécédent noté  $e$  (le nombre népérien) :  $\ln(e) = 1$

### 2.2.4) Le Tableau de variation et La courbe

$(C_{\ln})$  :  $(C_{\ln})$  à une tangente en  $A(1,0)$  :  $(T) : y = x - 1$

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln'x$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



**Exemple1** : simplifier et calculer :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$$

**Solution** :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln(e) + 4\ln(e) - (-\ln(e))$$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - (-1) = 7$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2}\ln(e) + \ln e + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3}9\ln(e)$$

$$B = 1\ln(e) + \ln e + \frac{1}{2}\ln(e) - 3\ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

**Exemple2**: Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^2 \text{ on pose : } X = \sqrt{x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5$$

**Solution** : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$  ?

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln(x)+1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  donc forme indéterminé (FI)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2$$

( car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  )

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (\ln(x) - 1) = +\infty$$

( car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  )

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

( car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  )

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (\ln(x) + 1) = -\infty$$

Car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + 1 = -\infty$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \text{ (où } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x = 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \text{ on pose : } X = \sqrt{x}$$

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) = \lim_{0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \text{ on pose : } X = \sqrt{x}$$

$$X = \sqrt{x} \Leftrightarrow X^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow X^2 = x$$

$$x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} X^2 (\ln(X^2))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} X^2 (2 \ln X)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4X^2 (\ln X)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} (X \ln X)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} ? \text{ On pose : } f(x) = \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{\ln \left( x^2 \left( 1 + \frac{3}{x} \right) \right)}{x-1} = \frac{\ln x^2 + \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2 \ln x + \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1} = \frac{2 \ln x}{x-1} + \frac{\ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1}$$

$$f(x) = 2 \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{\ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} = 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x^{\frac{2}{5}} \ln x \right)^5$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{5}} \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5 = 0$$

**Exercice2** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

$$1) \ln(2x-1) = \frac{3}{2} \quad 2) 2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$$

$$3) 3(\ln x)^2 + 2 \ln x - 1 = 0$$

$$4) \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$$

$$\text{Solution : } 1) \ln(2x-1) = \frac{3}{2}$$

a) cette équation est définie ssi :

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ donc : } D_E = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(2x-1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln(2x-1) = \frac{3}{2} \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln \left( e^{\frac{3}{2}} \right) \Leftrightarrow 2x-1 = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = (\sqrt{e})^3 \Leftrightarrow x = \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \right\}$$

$$2) 2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$$

a) cette équation est définie ssi :  $x > 0$   
on pose :  $\ln x = X$

$$\text{on a alors : } 2X^2 + X - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0$$

$$X_1 = \frac{-1+7}{2 \times 2} \text{ et } X_2 = \frac{-1-7}{2 \times 2}$$

$$\text{Donc : } X_1 = \frac{3}{2} \text{ et } X_2 = -2$$

$$\text{Donc : } \ln x_1 = \frac{3}{2} \text{ et } \ln x_2 = -2 \text{ donc : } x_1 = e^{\frac{3}{2}} \text{ et}$$

$$x_2 = e^{-2} \text{ finalement : } S = \left\{ e\sqrt{e}, \frac{1}{e^2} \right\}$$

3)  $3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$

a) cette équation est définie ssi :  $x > 0$

on pose :  $\ln x = X$

on a alors :  $3X^2 + 2X - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$X_1 = \frac{-2+4}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2-4}{2 \times 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

Donc :  $\ln x_1 = \frac{1}{3}$  et  $\ln x_2 = -1$

Donc :  $x_1 = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$  et  $x_2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$

finalement :  $S = \left\{ \sqrt[3]{e}, \frac{1}{e} \right\}$

4)  $\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$

a) cette équation est définie ssi :  $x > 0$  et  $\ln x - 1 \neq 0$

$$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

donc  $D_f = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$

$$\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \geq 0$$

$$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$e$	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$	+	0	-	+

$$S = (]0; e[ \cup ]e; +\infty[) \cap \left( \left] 0; \frac{1}{e} \right] \cup ]e; +\infty[ \right) = \left] 0; \frac{1}{e} \right] \cup ]e; +\infty[$$

**Exercice3 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système

$$\text{suivant : } \begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

**Solution :**  $\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \rightarrow 1 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \rightarrow 2 \end{cases} \quad x > 0 \text{ et } y > 0$

La somme des deux équations membres

à membres donne :

$$5\ln x = 5 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

On remplace  $x = e$  dans la première équation

On a donc :

$$3\ln e + \ln y = 2 \Leftrightarrow \ln y = 2 - 3 \Leftrightarrow \ln y = -1$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{e} \quad \text{Donc } S = \left\{ \left( e; \frac{1}{e} \right) \right\}$$

**Exercice4 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations

suivantes : 1)  $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

2)  $\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$

3)  $\ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$

**Solution :** 1)  $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

a) cette équation est définie ssi :  $x > 0$  et  $x-1 > 0$

donc :  $D_E = ]1; +\infty[$

b)  $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln 6$$

Ssi  $x(x-1) = 6$  ssi  $x^2 - x - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 3 \quad \text{ou} \quad x_2 = -2 \notin ]1; +\infty[ \quad \text{donc : } S = \{3\}$$

2)  $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$

a) cette équation est définie ssi :  $x+1 > 0$  et

$$2x-5 > 0 \text{ cad } \left( x > \frac{5}{2} \text{ et } x > -1 \right) \quad \text{donc } D_f = \left] \frac{5}{2}; +\infty[ \right.$$

b)

$$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \Leftrightarrow \ln((2x-5)(x+1)) \leq \ln 4$$

$$(2x-5)(x+1) \leq 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 \leq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81 > 0$$

$$x_1 = \frac{3+9}{2 \times 2} \text{ et } x_2 = \frac{3-9}{2 \times 2} \text{ donc : } x_1 = 3 \text{ et } x_2 = -\frac{3}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-3/2$	$3$	$+\infty$	
$2x^2-3x-9$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\text{Donc : } S = \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \cap \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[ = \left]\frac{5}{2}; 3\right[$$

$$3) \ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$$

a) cette équation est définie ssi :  $14-x > 0$  et  $10+7x-3x^2 > 0$  après résolution on trouve :

$$D_f = \left]-1; \frac{10}{3}\right[$$

$$b) \ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$$

$$14-x > 10+7x-3x^2 \Leftrightarrow 3x^2-8x+4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[ \cup \left]2; +\infty\right[$$

$$\text{Donc : } S = \left(\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[ \cup \left]2; +\infty\right[\right) \cap \left]-1; \frac{10}{3}\right[$$

$$S = \left]-1; \frac{2}{3}\right[ \cup \left]2; \frac{10}{3}\right[$$

**Exercice5** : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f : x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)} \quad 2) g : x \rightarrow \sqrt{1-\ln(e-x)}$$

$$3) h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$$

**Solution** : 1) cette fonction est définie ssi :

$$x+1 > 0 \text{ et } x > 0 \text{ et } \ln x > 0 \text{ et } \ln(\ln x) \neq 0$$

$$\text{Cad } x > -1 \text{ et } x > 0 \text{ et } x > 1 \text{ et } \ln x \neq 1$$

$$\text{Cad } x > 1 \text{ et } x \neq e \text{ donc : } D_f = \left]1; e\right[ \cup \left]e; +\infty\right[$$

2) cette fonction est définie ssi :

$$e-x > 0 \text{ et } 1 \geq \ln(e-x)$$

$$\text{Cad } x < e \text{ et } e-x \leq e \text{ Cad } x < e \text{ et } x \geq 0$$

$$\text{donc : } D_g = \left]0; e\right[$$

$$3) h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$$

Cette fonction est définie ssi :

$$2x > 0 \text{ et } (\ln(2x))^2 - 1 > 0$$

$$\text{Cad } x > 0 \text{ et } (\ln(2x)-1)(\ln(2x)+1) > 0$$

$$\ln(2x)+1=0 \Leftrightarrow \ln 2x = -1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2e}$$

$$\ln(2x)-1=0 \Leftrightarrow \ln 2x = 1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

$x$	$0$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$		
$\ln 2x+1$		$-$	$0$	$+$	$+$	
$\ln 2x-1$		$-$	$-$	$0$	$+$	
$(\ln 2x+1)(\ln 2x-1)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$S = \left]0; \frac{1}{2e}\right[ \cup \left]\frac{e}{2}; +\infty\right[$$

### 3) Dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

**Théorème** : Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et strictement positive sur  $I$  alors la fonction  $f(x) = \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$

$$\text{et } (\forall x \in I) \left( f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

**Exemple1** : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

**Solution** : la fonction  $u : x \rightarrow 3x^2 + 5$  est dérivable

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et on a : } 3x^2 + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

alors la fonction :  $f : x \rightarrow \ln(3x^2 + 5)$  est dérivable

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et on a : } f'(x) = \frac{(3x^2+5)'}{3x^2+5} = \frac{6x}{3x^2+5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Exemple2** : calculer la dérivée des fonctions

définies par : 1)  $f(x) = x^2 - \ln x$  2)  $f(x) = x \ln x$

$$3) f(x) = \ln(1+x^2)$$

**Solution :1)**  $f'(x) = (x^2 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

2)  $f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = 1 \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$

3)  $f'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$

**Corolaire :** Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction :

$f(x) = \ln(|u(x)|)$  est dérivable sur  $I$

et  $(\forall x \in I) (f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)})$

**Preuve :** (en exercice)

Etudier deux cas  $u(x) > 0$  sur  $I$  et  $u(x) < 0$  sur  $I$ .

**Exemple1 :** calculer la dérivée de la fonction

définie sur  $I = ]-2; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{(x^2+1)^3}$

**Solution :**  $\forall x \in ]-2; +\infty[$  on a :

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{(x^2+1)^3}\right) = \ln(\sqrt[4]{x^3+8}) - \ln(x^2+1)^3$$

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{4} \ln(x^3+8) - 3 \ln(x^2+1)$$

$$\text{Donc : } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4} \frac{(x^3+8)'}{x^3+8} - 3 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \quad \forall x \in ]-2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4} \frac{3x^2}{x^3+8} - 3 \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\text{Donc : } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-3x(7x^3-x+64)}{4(x^3+8)(x^2+1)}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{-3x(7x^3-x+64)}{4(x^3+8)(x^2+1)} f(x) = \frac{-3x(7x^3-x+64)}{4\sqrt[4]{(x^3+8)^3} (x^2+1)^4}$$

**Exemple2 :** Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \ln|\ln|x||$

2)  $f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$

**Solution :** 1) cette fonction est définie ssi :

$|x| > 0$  et  $\ln|x| > 0$  cad  $x \neq 0$  et  $|x| > 1$

Donc :  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

Donc  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; -1[$  et  $]1; +\infty[$

$\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ : f'(x) = (\ln|\ln|x||)' = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|}$

$$f'(x) = (\ln|\ln|x||)' = \frac{1}{x \ln|x|}$$

2)  $f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$

cette fonction est définie ssi :  $\sin^2 x + 3\sin x + 4 > 0$

on pose :  $t = \sin x$  donc :  $t^2 + 3t + 4$

$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$  donc :  $t^2 + 3t + 4 > 0$

Donc :  $D_f = \mathbb{R}$

Alors : la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(\sin^2 x + 3\sin x + 4)'}{\sin^2 x + 3\sin x + 4} = \frac{2\sin x \cos x + 3\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 4}$$

**Propriété :** Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors les fonctions primitives

de la fonction  $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$  sont les fonctions ;

$F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$

**Applications :** Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1)  $I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4+2}$     2)  $I = ]0; 1[; g(x) = \frac{1}{x \ln x}$

3)  $I = ]-\infty; 1[; h(x) = \frac{1}{x-1}$     4)  $I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

5)  $M(x) = \frac{1}{x^2-1}$  (Essayer d'écrire

$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$  où  $a$  et  $b$  des réels à

déterminer).

6)  $N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x-3}$

7)  $I = ]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

**Solution :** 1) on a  $f(x) = \frac{x^3}{x^4+2} = \frac{1}{4} \frac{(x^4+2)'}{x^4+2}$

Donc :  $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4+2| + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

Puisque :  $x^4+2 > 0$  donc :  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+2) + k$

2)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$

donc les fonctions primitives sont :

$G(x) = \ln|\ln x| + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

Puisque :  $x \in ]0;1[$  donc :  $\ln x < 0$

Donc :  $F(x) = \ln(-\ln x) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

3)  $I = ]-\infty;1[; h(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)'}{x-1}$  donc les fonctions

primitives sont :  $H(x) = \ln|x-1| + k$

Puisque :  $x \in ]-\infty;1[$  donc :  $x-1 < 0$

Donc :  $H(x) = \ln(1-x) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

4)  $I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x}$  donc les

fonctions primitives sont :  $K(x) = \ln|\sin x| + k$

avec  $k \in \mathbb{R}$

5)  $m(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$m(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

Donc les fonctions primitives sont :

$M(x) = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + k$

6)  $n(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2+5x+12)+38}{x-3}$

Donc :  $n(x) = x^2+5x+12 + \frac{38}{x-3}$

Donc les fonctions primitives sont :

$N(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 12x + 38 \ln|x-3| + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

7)  $I = ]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

$q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)} = \frac{1}{\ln(x-2)} = \frac{(\ln(x-2))'}{\ln(x-2)}$

Donc : donc les fonctions primitives sont :

$Q(x) = \ln|\ln(x-2)| + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

**Exercice6 :** Considérons la fonction  $f$  définie

par :  $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

2) en déduire la fonction primitive de  $f$  sur  $]-\infty; -2[$

Tel que  $F(-3) = \ln 2$

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+x-2 \neq 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1+8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$  et  $x_2 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc :  $D_f = \mathbb{R} / \{-2; 1\}$

$f(x) = \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$

Donc :  $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}$  Donc:  $3a=6$  Donc:  $a=2$

Donc :  $b=3$  Donc:  $(\forall x \in D_f); f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$

2)  $(\forall x \in \mathbb{R} / \{-2; 1\}); f(x) = 2 \frac{(x-1)'}{x-1} + 3 \frac{(x+2)'}{x+2}$

$F(x) = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + k$   $k \in \mathbb{R}$

$x \in ]-\infty; -2[ \Leftrightarrow x < -2$  et  $x < 1$

Donc :  $x+2 < 0$  et  $x-1 < 0$

Donc : les fonctions primitives sont :

$$F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F(-3) = \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln(4) + 3\ln(1) + k = \ln 2$$

$$k = \ln 2 - 2\ln(2^2) \Leftrightarrow k = -3\ln 2$$

$$\text{Donc : } F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) - 3\ln 2$$

## II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE $a$

### 1) Définition

**Définition :** Soit  $a$  un réel non nul et différent de 1. La fonction notée par  $\log_a$  définie sur  $]0, +\infty[$

par :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (\log_a = \frac{\ln x}{\ln a})$  S'appelle :

la fonction logarithmique de base  $a$

**Exemples :** 1) Pour :  $a = e$  on aura :  $\log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

$$2) \log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

### 2) Propriétés et règles de calcul :

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction  $\ln$  restent valables pour la fonction  $\log_a$ .

#### a) Propriétés caractéristiques

- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y))$
- $(\forall x > 0)\left(\text{Log}_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\text{Log}_a(x)\right)$
- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)\left(\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a(x) - \text{Log}_a(y)\right)$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\text{Log}_a(x^r) = r\text{Log}_a(x))$

**Preuve :** Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction  $\log_a$  et les propriétés de la

Fonction  $\ln$

**b) Propriétés :** La fonction  $\log_a$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$

$$1) (\forall x > 0)(\forall y > 0)(\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$$

$$2) (\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$$

**c) Propriété :** La fonction  $\log_a$  est continue dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

**Preuve :** (En exercice)

### 2) Etude et représentation de $\log_a$ :

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1 :

1) La fonction  $\log_a$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

2) La fonction  $\log_a$  est continue et dérivable

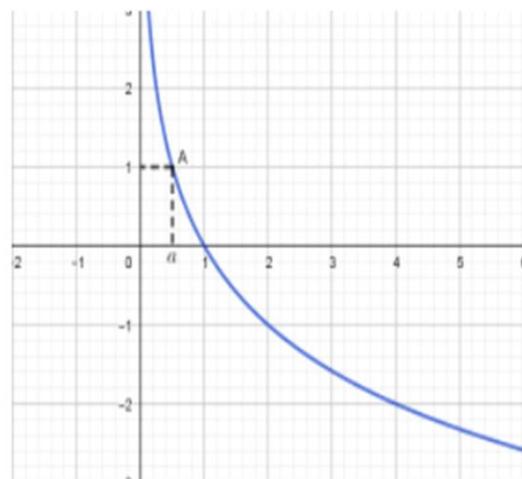
sur  $]0, +\infty[$  et  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ((\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a})$

donc le signe de  $\log'_a$  dépend du signe de  $\ln a$ , ce qui nous amène à discuter deux cas :  
 $\ln a > 0$  ;  $\ln a < 0$

Si  $a \in ]0, 1[$  alors  $\ln a < 0$

Et donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (\text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0)$ .

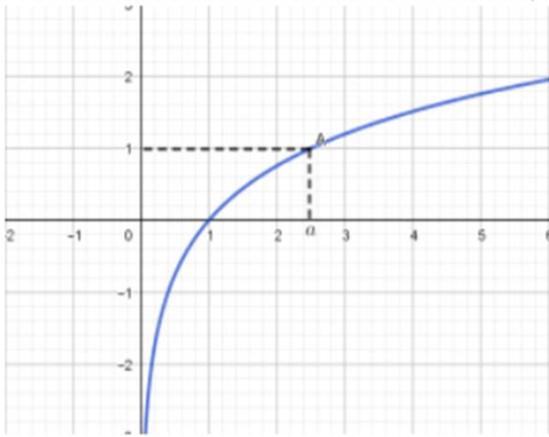
$x$	0	$a$	1	$+\infty$
$\text{Log}'_a(x)$		-	-	
$\text{Log}_a(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$



Si  $a \in ]1, +\infty[$  alors  $\ln a > 0$

Et donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (Log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0)$ .

$x$	0	1	$a$	$+\infty$
$Log'_a(x)$		+	+	
$Log_a(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



**Exemples :** simplifier et calculer :

1)  $\log_8 4$    2)  $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$    3)  $\log_{\sqrt{3}} 9$

4)  $A = \log_2 \left( \frac{1}{5} \right) + \log_2 (10) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[5]{3})$

**Solution :** 1)

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = -2 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -2 \times 1 = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4 \times 1 = 4$$

$$A = \log_2 \left( \frac{1}{5} \right) + \log_2 (10) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[5]{3}) = -\log_2 5 + \log_2 (5 \times 2) + \log_{\frac{1}{3}} \left( 3^{\frac{1}{5}} \right)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$A = 1 - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

**Exercice 7 :** On pose  $\alpha = \log_{40} (100)$  et  $\beta = \log_{16} (25)$

Calculer  $\beta$  en fonction  $\alpha$

**Solution :** on a :  $\alpha = \frac{\ln 100}{\ln 40} = \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln(2^3 \times 5)} = \frac{2 \ln 2 + 2 \ln 5}{3 \ln 2 + \ln 5}$

D'autre part :  $\beta = \frac{\ln 25}{\ln 16} = \frac{\ln(5^2)}{\ln(2^4)} = \frac{2 \ln 5}{4 \ln 2} = \frac{\ln 5}{2 \ln 2}$

Aussi on a :  $\alpha = \frac{2 + 2 \frac{\ln 5}{\ln 2}}{3 + \frac{\ln 5}{\ln 2}} = \frac{2 + 4\beta}{3 + 2\beta}$

$$\alpha = \frac{2 + 4\beta}{3 + 2\beta} \Leftrightarrow \alpha(3 + 2\beta) = 2 + 4\beta \Leftrightarrow 3\alpha + 2\alpha\beta = 2 + 4\beta$$

$$3\alpha + 2\alpha\beta = 2 + 4\beta \Leftrightarrow 2(\alpha - 2)\beta = 2 - 3\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{2 - 3\alpha}{2(\alpha - 2)}$$

### 3) Cas particulier $a = 10$ ; logarithme décimal :

**Définition :** La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se

note par **log** et  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (\log = \frac{\ln x}{\ln 10})$

**Propriétés :** 1)  $\log(10) = 1$

2)  $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

3)  $(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(10^r) = r)$

4)  $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

5)  $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

**Exemples :** simplifier et calculer :

1)  $\log_{10} 100$    2)  $\log_{10} 0,0001$

3)  $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

**Solution :** 1)  $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$

2)  $\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4$

3)  $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

$$A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$$

$$A = \log(5^2 \times 10^4) + \frac{1}{2} \log(5^2 \times 10) - \log(5^3)$$

$$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2} (\log 5^2 + \log 10) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 \log 10 + \frac{1}{2} (2 \log 5 + 1) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3 \log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

**Exercice 8 :** déterminer le plus petit entier naturel

$$n \text{ tel que : } \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}$$

$$\text{Solution : } \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20} \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \geq \log(10^{20})$$

$$\Leftrightarrow n \log\left(\frac{3}{2}\right) \geq 20 \Leftrightarrow n \geq \frac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Le plus petit entier naturel  $n_0$  est donc :

$$n_0 = E\left(\frac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}\right) + 1 = 114$$

**Exercice 9 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$1) \log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$$

$$2) 2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$$

Où  $\log$  est le logarithme décimal

**Solution :** 1) a) cette équation est définie ssi :

$$x > 0 \text{ et } 2x > 0 \text{ donc : } D_E = ]0; +\infty[$$

$$\text{b) Résoudre l'équation : } \log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$$

$$\text{ssi } \log_5(x) - 1 = 0 \text{ et } \log_3(2x) = 0$$

$$\text{ssi } \log_5(x) = \log_5(5) \text{ et } \log_3(2x) = \log_3(1)$$

$$\text{ssi } x = 5 \text{ et } x = \frac{1}{2} \text{ donc : } S = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$$

$$2) 2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$$

$$D_E = ]0; +\infty[ \text{ on pose : } \log x = X \text{ donc :}$$

$$2X^2 - 19X - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 361 + 80 = 441 = (21)^2 > 0$$

$$X_1 = \frac{19+21}{2 \times 2} = 10 \text{ et } X_2 = \frac{19-21}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \log x_1 = 10 \text{ et } \log x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } x_1 = 10^{10} \text{ et } x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10}\right\}$$

**Exercice 10 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations et équations suivantes :

$$1) \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1 \quad 2) \log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$$

**Solution :** 1) a) cette équation est définie ssi :

$$x - \frac{1}{2} > 0 \text{ donc : } x > \frac{1}{2} \text{ donc : } D_I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

car :  $\log_{\frac{1}{2}}$  est strictement décroissante

$$\text{donc : } x \leq 1 \text{ donc : } S = ]-\infty; 1] \cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

2) a) cette équation est définie ssi :

$$4x > 0 \text{ et } 16x > 0 \text{ et } 2x > 0 \text{ et } 2x \neq 1 \text{ et } 4x \neq 1$$

$$\text{donc : } x > 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq \frac{1}{4}$$

$$\text{donc : } D_I = ]0; +\infty[ - \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{b) } \forall x \in D_I : \log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4x) + \log_{4x}(4) = 4$$

Or on a  $\log_a(a) = 1$  donc :

$$\Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{4x}(4) = 2$$

$$\text{Et on a : } \log_{2x}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(2x)} = \frac{1}{\log_2(2x)}$$

$$\log_2(2x) = \log_2(2) + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

$$\text{Donc : } \log_{2x}(2) = \frac{1}{1 + \log_2 x}$$

$$\text{D'autre part on a : } \log_{4x}(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(4x)} = \frac{1}{\log_4(4x)} \text{ et}$$

$$\log_4(4x) = \log_4(4) + \log_4 x = 1 + \log_4 x$$

$$\text{Et puisque : } \log_4 x = \frac{\ln(x)}{\ln(4)} = \frac{\ln(x)}{2\ln(2)} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

$$\text{Donc : } \log_{4x}(4) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \log_2(x)} = \frac{2}{2 + \log_2(x)}$$

$$\text{Donc l'équation devient : } \frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} = 2$$

$$\text{Cad : } 2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x = 0$$

$$\text{Cad : } \log_2 x = \frac{-3}{2} \text{ ou } \log_2 x = 0$$

$$\text{Cad : } x = 2^{\frac{-3}{2}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = 1$$

$$\text{donc : } S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right\}$$

#### 4) Applications

**Exemple1:**A) soit la fonction  $g$  définie

$$\text{par : } g(x) = x - \ln x$$

1) Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de la fonction  $g$  et déterminer les limites aux bornes de  $D_g$

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$  puis dresser le tableau de variation de  $g$

3) en déduire que :  $\forall x > 0 \quad x > \ln x$

B) soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) Montrer que  $D_f = ]0; +\infty[$

2) Montrer que  $f$  est continue à droite de 0

3) calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0

5) Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de  $f$

7) déterminer les points d'intersections de  $C_f$  et la

Droite :  $(\Delta): y = 1$

8) Montrer que :  $C_f$  coupe l'axe des abscisses

en un point d'abscisse dans  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9) Construire la courbe  $C_f$  dans un repère

$(O; \vec{i}; \vec{j}) \quad (\ln 2 \approx 0,7 \quad , \quad e \approx 2,7)$

**Solution :** 1)  $D_g = ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty \quad \text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$2) \quad g'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Le signe de:  $g'(x)$  est celui de  $x-1$  car  $x \in ]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $g$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	↘ 1 ↗	$+\infty$

3) on remarque que : que la fonction  $g$

Admet une valeur minimal en  $x_0 = 1$

Donc :  $g(1) \leq g(x) \quad \forall x \in ]0; +\infty[ \quad g(1) = 1$

Donc :  $0 < 1 \leq x - \ln x$  Donc :  $\ln x < x \quad \forall x \in ]0; +\infty[$

$$\text{B) 1) } \begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$f$  est définie ssi  $x - \ln x \neq 0$  et  $x > 0$

On a  $0 < x - \ln x$  donc :  $x - \ln x \neq 0$  et on a  $f(0) = -1$

Donc :  $D_f = [0; +\infty[$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left( \frac{x}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left( \frac{x}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$$

Et on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0^-$  et  $\frac{0}{\infty} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$$

Donc :  $f$  est continue à droite de 0

3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1$$

Car :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Interprétation graphique : la droite  $y = 1$  est une

asymptote à la courbe de  $f$

4) Etude de la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x + \ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x(x - \ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \ln x} = 0 = f'_d(0)$$

Donc :  $f$  est dérivable à droite de 0

5)

$$f'(x) = \left( \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \right)' = \frac{(x + \ln x)'(x - \ln x) - (x + \ln x)(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)(x - \ln x) - (x + \ln x) \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} - x - \ln x + 1 + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2}$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$$

6) tableau de variation de  $f : x \in ]0; +\infty[$

Le signe de:  $f'(x)$  est celui de  $1 - \ln x$

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow e > x$$

Tableau de variation de  $f$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{e+1}{e-1}$	1

7) points d'intersections de  $C_f$  et  $(\Delta): y = 1$  ?

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1 \Leftrightarrow x + \ln x = x - \ln x$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

le point d'intersection de  $C_f$  et la Droite :  $(\Delta): y = 1$

est :  $A(1;1)$

8)  $f$  est continue sur  $D_f = [0; +\infty[$  donc continue

Sur :  $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$  et on a :  $f(1) = \frac{\frac{1}{2} + \ln(1)}{\frac{1}{2} - \ln(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 > 0$

$$\text{Et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{1 - 2\ln 2}{1 + 2\ln 2} = \frac{1 - 2\ln 2}{1 + 2\ln 2} < 0$$

Donc : d'après le théorème des valeurs

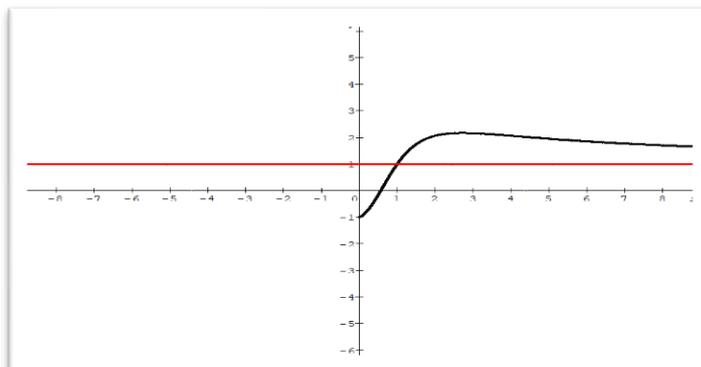
intermédiaires : l'équation  $f(x) = 0$  admet au

moins une solution dans  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$  cad  $C_f$  coupe

l'axe des abscisses en un point d'abscisse

dans  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9)



**Exemple2 :** Considérons les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1) a) calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

b) montrer que :  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  on a :

$$g(x) = (1+x) \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

et en déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c) Etudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$   
Puis dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$

2) en déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3) calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

4) montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

**Solution :** 1)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x)$  ?

On pose :  $t = 1+x$   $x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ? \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = ? \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{11}{6} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

b) montrons que :  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  on a :

$$g(x) = (1+x) \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right) ?$$

$$g(x) = \ln(1+x) - \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) = \ln(1+x) - \left( \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6} \right)$$

$$g(x) = (1+x) \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

Déduction de :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} ? \text{ On pose : } t = 1+x$$

$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} = +\infty$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty$

C1) Etude des variations des fonctions  $f$  ?

$\forall x \in ]-1; +\infty[$   $x \rightarrow \ln(1+x)$  est dérivable donc  $f$  est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in ]-1; +\infty[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc : *tableau de variations de  $f$*  :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			$+\infty$

$-\infty \swarrow \quad \searrow +\infty$

C2) Etude des variations les fonctions  $g$  ?

$g$  est dérivable sur  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{1+x}$$

Le signe de  $g'(x)$  est celui de  $-x$

Donc : *tableau de variations de  $g$*  :

$x$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		0	

$-\infty \swarrow \quad \searrow -\infty$

2) déduction d'un encadrement de  $\ln(1+x)$  ?

Des variations les fonctions  $f$  et  $g$  en déduit que :

$g(x) < 0 < f(x) \quad \forall x \in ]0; +\infty[$  donc :

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} < 0 < \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Donc : } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$  ?

$$\text{Donc : } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{on déduit que}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} < \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \quad \text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

4) montrons que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} ?$$

Soit  $\psi$  la fonction définie  $\forall x \in ]-1; +\infty[$

$$\text{Par : } \psi(x) = g(x) + \frac{x^4}{4}$$

$\psi$  est dérivable sur  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  et on a :

$$\psi'(x) = g'(x) + x^3 = \frac{x^4}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in ]-1; +\infty[$$

$\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  donc  $\psi$  strictement croissante

sur  $]-1; +\infty[$

$$x \geq 0 \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(0) = 0$$

$$\text{donc : } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$\text{donc : } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

**Exemple 3** : 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations et équations suivantes :

1)  $\log_3(7x-1)^2 = 0$     2)  $\log_3(5x+1) = 2$

3)  $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

**Solution** : 1)a) cette équation est définie ssi :

$$7x-1 \neq 0 \quad \text{donc : } x \neq \frac{1}{7} \quad \text{donc : } D_I = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{7} \right\}$$

"b)  $\log_3(7x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 7x-1=1 \text{ ou } 7x-1=-1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \text{ ou } x=0$$

$$\text{donc : } S = \left\{ 0; \frac{2}{7} \right\}$$

2)  $\log_3(5x+1) = 2$

2)a) cette équation est définie ssi :  $5x+1 > 0$

$$\text{Donc : } D_E = \left] -\frac{1}{5}; +\infty \right[$$

$$\log_3(5x+1) = 2 \Leftrightarrow 5x+1 = 3^2 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$

Puisque :  $\frac{8}{5} \in ]-\frac{1}{5}; +\infty[$  alors ::  $S = \left\{ \frac{8}{5} \right\}$

$$3) \frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$$

a) cette équation est définie ssi :  $5x+1 > 0$  et

$$\log_3(7x-1)^2 \neq 0 \text{ et } 7x-1 \neq 0$$

$$\text{cad : } x > -\frac{1}{5} \text{ et } x \neq \frac{1}{7} \text{ et } x \neq \frac{2}{7} \text{ et } x \neq 0$$

$$D_E = ]-\frac{1}{5}; +\infty[ - \left\{ \frac{1}{7}; \frac{2}{7} \right\}$$

D'abord étudions le signe de :  $\log_3(7x-1)^2$

$$\log_3(7x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 \geq 1 \text{ car : } \log_{\frac{1}{3}}$$

strictement décroissante

$$\Leftrightarrow (7x-1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x(7x-2) \geq 0$$

$$1 \text{ cas : si : } x \in ]-\frac{1}{5}; 0[ \cup ]\frac{2}{7}; +\infty[ \text{ on a donc :}$$

$$\log_3(7x-1)^2 \geq 0$$

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(5x+1) \leq \log_3(7x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x+1 \leq (7x-1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq 49x^2 - 19x$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\frac{1}{5}; 0[ \cup ]\frac{19}{49}; +\infty[$$

$$2 \text{ cas : si : } x \in ]0; \frac{1}{7}[ \cup ]\frac{2}{7}; \frac{2}{7}[ \text{ on a donc :}$$

$$\log_3(7x-1)^2 < 0$$

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(7x-1)^2 \leq \log_3(5x+1)$$

$$\Leftrightarrow (7x-1)^2 \leq 5x+1 \Leftrightarrow 49x^2 - 19x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left( ]0; \frac{1}{7}[ \cup ]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}[ \right) \cap \left[ 0; \frac{19}{49} \right] \Leftrightarrow x \in ]0; \frac{1}{7}[ \cup ]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}[$$

$$\text{Donc : } S = ]-\frac{1}{5}; 0[ \cup ]0; \frac{1}{7}[ \cup ]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}[ \cup \left[ \frac{19}{49}; +\infty \right[$$

**Exemple4:** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$

2) montrer que le domaine d'étude de  $f$  est :

$$D_E = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

3) Déterminer les limites aux bornes de  $D_E$

4) Etudier les variations de  $f$  sur  $D_E$

5) Etudier les branches infinies de  $(C_f)$

la courbe de  $f$

6). Construire la courbe  $(C_f)$  dans  $D_E$

$$\text{Solution : 1) } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

cette fonction est définie ssi :  $x \neq 0$  et  $x \neq 1$

$$\text{et } \frac{x+1}{x-1} \neq 0$$

$$\text{donc : } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

2) le domaine d'étude de  $f$  ?

$$\text{a) } \forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\} \text{ on a } -x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

$$\text{b) } f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right|$$

$$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

Donc :  $f(-x) + f(x) = -6$

Donc :  $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times (-3) - f(x)$

Donc le point :  $I(0; -3)$  est un centre de symétrie

de  $(C_f)$  la courbe de  $f$

donc il suffit d'étudier  $f$  sur :  $D_E = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

3) les limites aux bornes de  $D_E$  ?

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

On a :  $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

4) Etude des variations de  $f$  sur  $D_E$  ?

La fonction  $f$  est dérivable sur les intervalles  $]1; +\infty[$  et  $]0; 1[$  (somme et composées de fonctions dérivables)

et on a :  $f'(x) = 1 - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{(2x^2 - 1)(x^2 - 3)}{2x^2(x^2 - 1)}$

$\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

Donc : tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$
				$\searrow$	$+\infty$
				$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$
					$+\infty$

5) Etude des branches infinies de  $(C_f)$

la courbe de  $f$  ?

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  donc :  $x=0$  est une asymptote

de la courbe de  $f$

•  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  donc :  $x=1$  est une asymptote

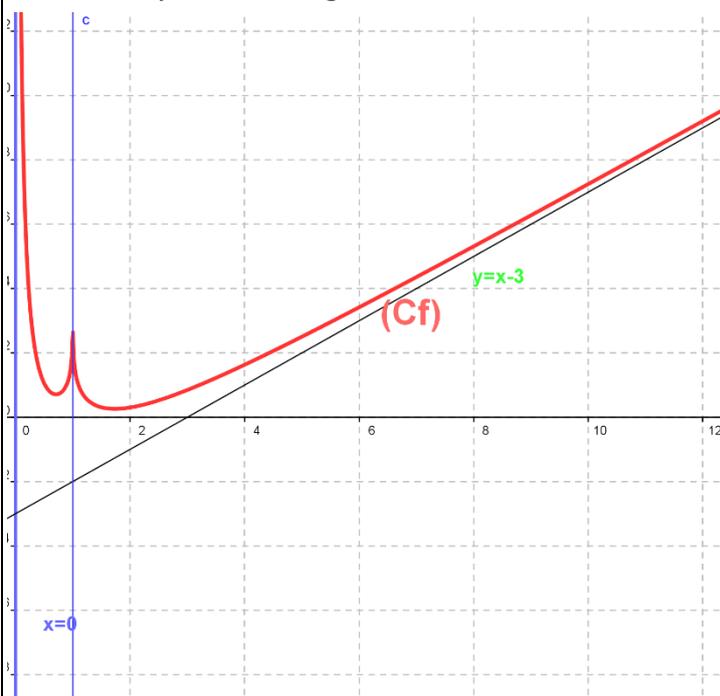
de la courbe de  $f$

•  $x=-1$  est une asymptote de la courbe de  $f$  (par symétrie)

• On a :  $f(x) - (x-3) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0$

Donc :  $y = x - 3$  est une asymptote oblique de la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

