

**Exercices**

**TD : Structures algébriques (partie 2)**

**Groupe anneau corps**

**Exercice 1:** on pose  $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\forall (x; y) \in I^2$

On muni  $I$  de la loi de composition définie par :

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que  $(I; *)$  est un groupe commutatif

**Exercice 2:** on muni  $\mathbb{R}^2$  d'une loi de composition interne  $T$  défini par :

$$(x; y) T (x'; y') = (x + x'; y e^{x'} + y' e^{-x})$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x'; y') \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que  $(\mathbb{R}^2; T)$  groupe non commutative

**Exercice 3:** soit  $(G; \cdot)$  un groupe noté

multiplicativement et tel que :  $(a; b) \in G^2$

$$(ab)^2 = a^2 b^2 \text{ Montrer que ce groupe est}$$

commutatif

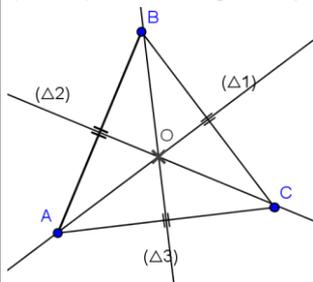
**Exercice 4:** (étude d'un groupe fini)

Montrer que  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$  et  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}; \times)$  sont

deux groupes commutatifs

**Exercice 5:** (étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



$(\Delta_1)$  la médiatrice du segment  $[BC]$

$(\Delta_2)$  la médiatrice du segment  $[AB]$

$(\Delta_3)$  la médiatrice du segment  $[AC]$

Soit  $\zeta$  l'ensemble des transformations

suivantes :  $\zeta = \{r_1; r_2; r_3; s_1; s_2; s_3\}$

$r_1$  la rotation de centre O et d'angle 0 :  $r_1(O; 0)$

$r_2$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  :  $r_2\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$

$r_3$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{4\pi}{3}$  :  $r_3\left(O; \frac{4\pi}{3}\right)$

$s_1$  la symétrie axial d'axe:  $(\Delta_1)$

$s_2$  la symétrie axial d'axe :  $(\Delta_2)$

$s_3$  la symétrie axial d'axe :  $(\Delta_3)$

Montrer que :  $(\zeta; \circ)$  est un groupe

**Exercice 6:** soit  $(G; \cdot)$  un groupe noté

multiplicativement et e l'élément neutre de  $G$

1) Montrer que si:  $\forall (a; b) \in G^2 : (a.b)^2 = a^2 . b^2$

alors le groupe  $G$  est commutatif

2) Montrer que si:  $\forall x \in G : x^2 = e$  alors le

groupe  $G$  est commutatif

**Exercice 7:** (on considère l'ensemble des

$$\text{matrices suivante : } E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que  $E$  n'est pas un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

**Exercice 8:** soit  $I$  l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que  $(I; +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}; +)$

**Exercice 9:** montrer que :  $H = \{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^*; \times)$

**Exercice 10:**  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que  $(U; \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*; \times)$

**Exercice 11:** on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^{**} \right\}$$

Montrer que  $E$  est un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

**Exercice 12 :** soit  $(G; \cdot)$  un groupe noté

multiplicativement et soit  $a \in G$

On pose :  $C_a = \{x \in G / ax = xa\}$

(centralisateur de  $a$ )

Et :  $Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G : xy = yx\}$  (centre de  $G$ )

Montrer que  $C_a$  et  $Z(G)$  sont des sous-groupes

de :  $(G; \cdot)$

**Exercice 13 :** On munit  $\mathbb{R}$  de la loi de composition interne définie par :

$$x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

1) soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}; +)$  vers  $(\mathbb{R}; *)$

2) En déduire la structure de  $(\mathbb{R}; *)$

**Exercice 14 :** on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1) Montrer que  $(E; +)$  est un groupe commutatif

2) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(\mathbb{Q}; \times)$

3) Montrer que  $(E; +; \times)$  est un anneau commutatif unitaire

**Exercice 15:** Soit  $(A; +; \times)$  un anneau.

Tel que :  $x^2 = x \quad \forall x \in A$  ( $(A; +; \times)$  s'appelle anneau de Boole)

1) calculer  $(x+x)^2$

2) en déduire que :  $x+x=0_A$  ( $0_A$  est l'élément

neutre de  $(A; +)$ )

3) soient :  $x \in A$  et  $y \in A$

a) calculer  $(x+y)^2$  en fonction de  $x$  et  $y$

b) en déduire que  $(A; +; \times)$  est commutatif

c) en déduire :  $xy(x+y)$

4) on suppose que :  $x \neq 0_A$  et  $y \neq 0_A$  et  $y \neq x$

a) montrer que : a)  $x+y \neq 0_A$     b)  $x+y \neq y$

5) déterminer le tableau de la somme pour les éléments :  $0_A ; x ; y ; x+y$

**Exercice 16:** soit  $(K, +, \times)$  un corps fini :

$$K = \{0; e; x_1; x_2; \dots; x_m\}; m \in \mathbb{N}^*$$

Avec :  $0$  (resp.  $e$ ) l'élément neutre pour  $+$  (resp.  $\times$ ).

- 1) montrer que :  $-e$  et  $e$  sont les seuls éléments de  $K$  qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi  $\times$
- 2) montrer que le produit de tous les éléments de  $K$  est égal à  $-e$

3) on considère le corps  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \times)$  avec  $n$

premier montrer que :  $(\overline{n-1})! + 1 \equiv 0 [n]$

**Exercice 17:** on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que  $(E; +)$  est un groupe commutatif

2) Montrer que  $E$  est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

3) soit  $f$  l'application qui associe à chaque

matrice  $M_{(a,b)}$  de  $E - \{0_2\}$  le nombre complexe :

$$a + ib\sqrt{2} \text{ de } \mathbb{C}^*$$

a) Montrer que  $f$  est un morphisme bijectif de

$$(E - \{0_2\}, \times) \text{ dans } (\mathbb{C}^*; \times)$$

b) en déduire la structure de  $(E - \{0_2\}, \times)$

4) Montrer que  $(E; +; \times)$  est un corps

**Exercice 18:** Soit  $(K; +; \times)$  un corps.

On note  $0_K$  l'élément neutre de  $(K; +)$  et  $1_K$

l'élément neutre de  $(K; \times)$  et on suppose qu'il

existe un homomorphisme  $f$  bijectif de  $(K; +)$

$$\text{vers } (K - \{0_K\}; \times)$$

1) on suppose que  $1_K + 1_K = 0_K$

montrer que :  $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que :  $1_K + 1_K \neq 0_K$  et on pose :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K)$$

a) montrer que :  $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que  $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas

d'homomorphisme  $f$  bijectif de  $(K; +)$  vers

$$(K - \{0_K\}; \times)$$

**Exercice 19 :**

1) On munit de la loi de composition interne

définie par :  $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1); \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que  $*$  est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2) On munit  $\mathbb{R}^{**}$  de la loi de  $*$  composition interne

définie par :  $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que  $*$  est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de  $\mathbb{R}$  n'a de symétrique pour  $*$

3) On munit  $\mathbb{R}$  de la loi de composition interne  $*$

définie par :  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que l'application :  $x \rightarrow x^3$  est un

isomorphisme de  $(\mathbb{R}; *)$  vers  $(\mathbb{R}; +)$  En déduire que

$(\mathbb{R}; *)$  est un groupe commutatif

**Exercice 20:** on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que :  $G \neq \emptyset$

2) Montrer que :  $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$

3) Montrer que  $G$  est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

4) est ce que  $G$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$  ?

5) on pose :  $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

calculer  $M^n(\theta) \forall n \in \mathbb{N}^*$

ou :  $M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois}}$

6) soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $G$  tel que :

$$f(\theta) = M(\theta)$$

a) Montrer que  $f$  est un morphisme surjectif de  $(\mathbb{R}; +)$  dans  $(G; \times)$

b) en déduire la structure de  $(G; \times)$

7) soit l'ensemble :  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

a) Montrer que :  $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

b) Montrer que  $(U; \times)$  est un groupe commutatif

**Exercice 21:** Soit  $(A; +; \times)$  un anneau.

Et  $1_A$  est l'élément neutre de  $(A; \times)$

soient :  $a \in A$  et  $b \in A$  tels que :

a)  $ab + ba = 1_A$

b)  $a^2b + ba^2 = a$

1) montrer que :  $a^2b = ba^2$

2) montrer que :  $aba + aba = a$

3) en déduire que :  $ab = ba$

**Exercice 22:** Soit  $(K; +; \times)$  un corps.

On note :  $1_K$  l'élément neutre de  $(K; \times)$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $K - \{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a)  $x + y = 1_K$       b)  $x^{-1} + y^{-1} = 1_K$

avec :  $x^{-1}$  le symétrique de  $x$  pour la loi  $\times$

1) montrer que :  $xy = yx = -1_K$

2) montrer que :  $x^4 + y^4 = 7 \cdot 1_K$

Avec :  $7 \cdot 1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{7 \text{ fois}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

