Région de Béni Mellal Khénifra 2015(Session Normale)

Exercice1 : 6points (1.5pt +1.5pt+2pt+1pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-3x+2=0$

2) a) Vérifier que : $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2-2x-3\leq 0$

3) a) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x-y=16 \\ x+y=90 \end{cases}$

b) Ahmed a acheté un kilogramme de viande de poulet et un kilogramme de poisson pour un prix total de 90 DH, sachant que le prix d'un kilogramme de poisson dépasse le prix d'un kilogramme de poulet de 16DH.
Déterminer le prix d'un kilo de poisson et le prix d'un kilo de poulet.

Exercice2 :3.5points (1pt +1.5pt +1pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=3$ et sa raison $r=7$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer que : $u_n=7n+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et vérifier que : $u_{10}=73$

3) Calculer la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

Exercice3: 3points (1pt +1pt +1pt)

Une urne contient 3 boules : 1boule rouge et 1boule Blanche et 1boule bleu
On tire au hasard **2** boules successivement et avec remise

1) Calculer : $3!\ et\ C_3^2$

2) Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ? ($card\,\Omega=?$)

3) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes

Exercice4 : 6.5points (2pt +1.5pt+1pt+1pt+1pt)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)$

2) Calculer : $f'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^2-8x+2$

1) Calculer : $g(0)$ et $g(2)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

3) Calculer : $g'(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

4) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Solution :

Exercice1 : 1) Calculons le discriminant de l'équation $x^2-3x+2=0$: a = 1, b =-3 et c = 2
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :
Les solutions sont : $x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$

Par suite : $S=\{1;2\}$

2) a)

$$(x+1)(x-3)=x^2-3x+x-3$$
$$=x^2-2x-3$$

2)b) $(x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=3$

Les racines sont : $x_1=-1$ et $x_2=3$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $S=[-1;3]$

3) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x-y=16 \\ x+y=90 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :
Donc : $(2)+(1)$ $x-y+x+y=16+90$

Équivaut à : $2x=106$

Équivaut à : $x=\frac{106}{2}=53$ et on remplace dans : $x+y=90$

Équivaut à : $53+y=90$ C'est à dire : $y=90-53=37$

Donc : $S=\{(53,37)\}$

2) Soit x le prix d'un kilo de poisson et y le prix d'un kilo de poulet
On sait que Ahmed a acheté un kilogramme de viande de poulet et un kilogramme de poisson pour un prix total de 90 DH donc : x + y = 90
On sait aussi que : le prix d'un kilogramme de poisson dépasse le prix d'un kilogramme de poulet de 16DH donc : x - y = 16

On retrouve les deux équations du système de la question précédente : $\begin{cases} x-y=16 \\ x+y=90 \end{cases}$

Par conséquent : le prix d'un kilo de poisson est :53
Le prix d'un kilo de poulet est :37

Exercice2 :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=3$ et sa raison $r=7$

a) $u_1=u_0+r=3+7=10$

b) $u_2=u_1+r=10+7=17$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=3$ et sa raison $r=7$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 3 + 7n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$u_n = 7n + 3$ donc : $u_{10} = 7\times 10 + 3 = 70 + 3 = 73$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_{10}}{2}$$

$$S = 11\frac{3+73}{2} = 11\frac{76}{2} = 11\times 38 = 418$$

Exercice3 :1) $3! = 3\times 2\times 1 = 6$ et $C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3\times 2}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$

2)

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
3	3

Le nombre de tirages possibles est : $card\,\Omega = 3\times 3 = 3^2 = 9$

3) tirer 2 boules de couleurs différentes :

(Attention à l'ordre)

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
R 1	B 1

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
B 1	R 1

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
R 1	BL 1

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
BL 1	R 1

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
B 1	BL 1

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
BL 1	B 1

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes est :

$1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 = 6$

Exercice4 :I) 1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2) Calculer : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

II) 1) $g(x) = 2x^2 - 8x + 2$ donc : $g(0) = 2\times 0^2 - 8\times 0 + 2 = 2$

$g(2) = 2\times 2^2 - 8\times 2 + 2 = 8 - 16 + 2 = -6$

2) Calcul de : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 - 8x + 2 = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 - 8x + 2 = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 2x^2 - 8x + 2$ Donc : $g'(x) = (2x^2 - 8x + 2)' = 2\times 2x - 8 + 0 = 4x - 8$

Donc : $g'(x) = 4x - 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) Le tableau de variation de g : $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-8=0$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$ $\quad g'(x)=4x-8 \quad a=4 \succ 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$