Région CASABLANCA - SETTAT

2008(Session Normale)

Exercice1 : 6points (2pt +2pt +2pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2 - 11x + 9 = 0$

2) a) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$

b) Un étudiant a acheté 8 livres de deux types différents pour un prix total de 105 dirhams Déterminez le nombre de livres de chaque type si vous savez que le prix d'un livre du premier type est de 10 dirhams et que le prix d'un livre du deuxième type est de 15 dirhams

Exercice2 : 4points (0.5pt +1.25pt +1pt +1.25pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et $u_0 = -2$

1) Calculer : u_1

2) Montrer que : $u_n = -2(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Est ce que le terme -22 est un terme de la suite $(u_n)_n$? justifier votre réponse

4) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

Exercice3 : 2points (0.5pt +0.5pt +1pt)

1) Calculer C_{12}^3

2)Une urne contient 7 boules blanches et 5 boules noires

On tire simultanément 3 boules de cette urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de mêmes couleurs ?

Exercice4 : 8points (0.5pt +1.5pt +1.5pt +2pt +1.5pt +1.5pt)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-6}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $f\left(\dfrac{-3}{2}\right)$ et $f(0)$

3) Calculer : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x \succ -2}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x \prec -2}} f(x)$

4) a) Vérifier que : $\forall x \in D_f \;;\; f'(x) = \dfrac{-21}{(3x-6)^2}$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$

Et donner le tableau de variations de f sur D_f

Solution :

Exercice1 :

1) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-11x+9=0$: a = 2, b =-11et c = 9
Donc : Δ = b^2 – 4ac = (-11)^2 – 4 x 2 x 9 = 49.
Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1=\frac{11+\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{11+7}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$ et $x_2=\frac{11-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{11-7}{4}=\frac{4}{4}=1$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} -2x-2y=-16 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$

Donc : $(2)+(1)$ $-2x-2y+2x+3y=-16+21$

Équivaut à : $y=5$ et on remplace dans : $x+y=8$

Équivaut à : $x+5=8$ C'est à dire : $x=8-5=3$

Donc : $S=\{(3,5)\}$

b) Soient : x le nombre de livres du 1type et y le nombre de livres du 2type

Puisqu'il étudiant a acheté 8 livres des deux types alors : $x+y=8\ (1)$

Puisque le prix total de 105 dirhams Alors : $10x+15y=105\ (2)$

Alors : $2x+3y=21\ (2)$

Il suffit de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$

On a trouvé que : $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$

Donc : le nombre de livres du 1type est : 3
Le nombre de livres du 2type est : 5

Exercice2 :

1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=-2$ et sa raison $r=-2$ alors :

$u_1=u_0+r=-2+-2=-4$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique alors : $u_n=u_0+nr=-2+(-2)n=-2(1+n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_n=-22 \Leftrightarrow -2(1+n)=-22 \Leftrightarrow 1+n=\frac{-22}{-2} \Leftrightarrow 1+n=11 \Leftrightarrow n=11-1 \Leftrightarrow n=10$

Donc : -22 est un terme de la suite $(u_n)_n$ et on a : $u_{10}=-22$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

$$S=11\frac{-2+-22}{2}=11\times\frac{-24}{2}=11\times(-12)=-132$$

Exercice3 :

1) $C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{3\times2}=\frac{6\times2\times11\times10}{6}=2\times11\times10=220$

1) Dans l'urne il Ya :12 boules et on tire simultanément 3 boules de cette urne

Donc : Le nombre de tirages possibles est : C_{12}^{3}

$C_{15}^{3}=\frac{15!}{3!(15-3)!}=\frac{15!}{3!12!}=\frac{15\times14\times13\times12!}{3!12!}=\frac{15\times14\times13}{3!}=\frac{3\times5\times2\times7\times13}{6}=455$

2) tirer 3 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 3 boule blanche **ou** tirer 3 boules noires

Le nombre de possibilités est : $C_7^3+C_5^3$ **OU** c'est : **+**

$C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\times4\times3!}{3!\times2}=\frac{5\times4}{2}=10$ et $C_7^3=\frac{A_7^3}{3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=\frac{7\times6\times5}{6}=7\times5=35$

Le nombre de possibilités de tirer 3 boules de mêmes couleurs est : $35+10=45$

Exercice4 :

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x-6\neq0\}$

$3x-6=0\Leftrightarrow3x=6\Leftrightarrow x=\frac{6}{3}=2$

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{3x-6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

a) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+3}{3x-6}$

On a : $\lim\limits_{x\to2^+}2x+3=2\times2+3=4+3=7$ et $\lim\limits_{x\to2^+}3x-6=6-6=0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

On a : $\lim\limits_{x\to2^+}2x+3=2\times2+3=4+3=7$ et $\lim\limits_{x\to2^+}3x-6=6-6=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x+3}{3x-6}$

On a : $\lim\limits_{x\to2^-}2x+3=7$ et $\lim\limits_{x\to2^-}3x-6=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$

4) Calculer : $\forall x\in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$; $f'(x)=\left(\frac{2x+3}{3x-6}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{2x+3}{3x-6}\right)'=\frac{(2x+3)'(3x-6)-(2x+3)(3x-6)'}{(3x-6)^2}=\frac{2(3x-6)-3\times(2x+3)}{(3x-6)^2}$

$$f'(x) = \frac{6x - 12 - 6x - 9}{(3x-6)^2} = \frac{-21}{(3x-6)^2} \succ 0$$

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2/3 \searrow +\infty$	‖	$-\infty \searrow 2/3$