Région de Fès Meknès (Taza Taounat)

2013(Session Normale)

Exercice1 : 5points (3pt +2pt)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $-2x^2-6x+8=0$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation suivante : $-x^2-3x+4\geq 0$

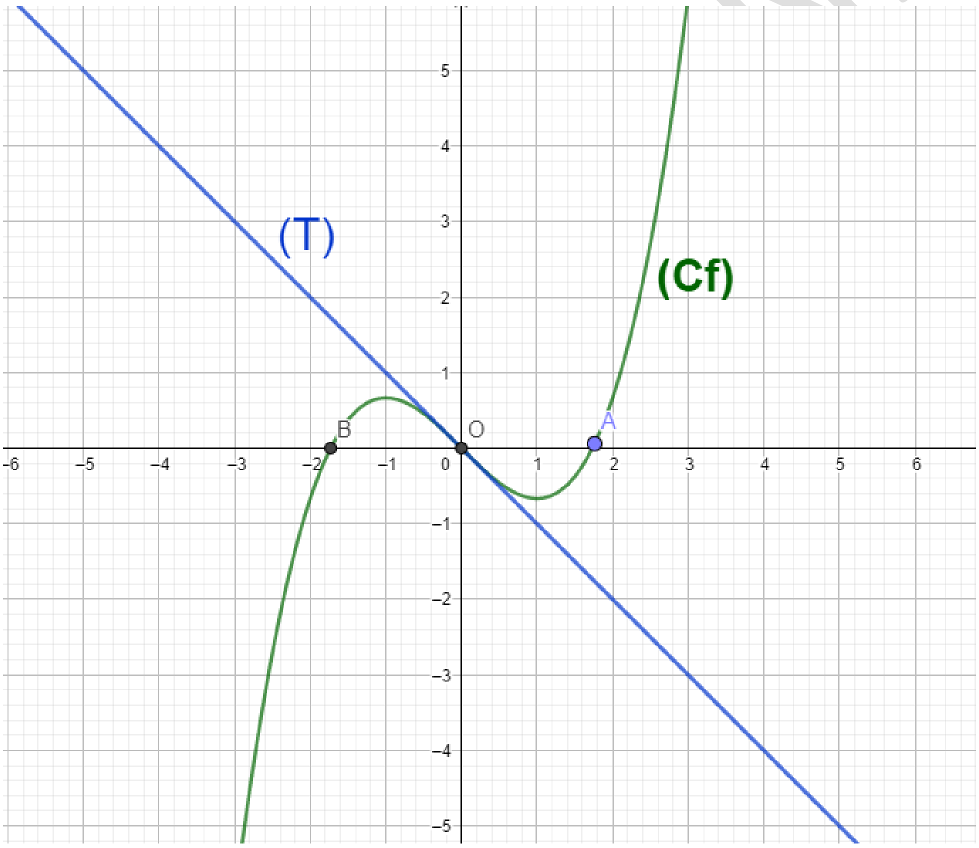
2) a) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x-y=1 \end{cases}$

b) En déduire la résolution du système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x-2y^2=-3 \\ x-y^2=1 \end{cases}$

Exercice2 : 8points (1pt +1pt +1.5pt +1pt+ +1pt +0.5pt +1pt +1pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

La courbe représentative (C_f) de f est donnée dans le repère ci-dessous : (Voire figure)



1) Calculer : $f(0)$ *et* $f(1)$

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ L'équation : $f(x)=0$

4) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=(x-1)(x+1)$

5) En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

6) Que représente la droite (T) pour la courbe représentative (C_f) de f ?

7) Déterminer l'équation de la droite (T)

8) Résoudre dans $\mathbb{R}$ L'inéquation : $f(x) \geq -x$

Exercice3 : 4points (1pt +2pt +1pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_{10} = 35$ et $u_6 = 23$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = 2^{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Vérifier que la raison r de cette suite est 3 et que : $u_0 = 5$

2) Calculer la somme suivante : $S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013}$

3) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$

Exercice4 : 3points (1.5pt +1.5pt)

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges
On tire au hasard **2** boules successivement et avec remise
1) Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ? ($card\,\Omega = ?$)
2) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches
3) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges
4) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs
5) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes

Solution :

Exercice1 :

1) Calculons le discriminant de l'équation $-2x^2 - 6x + 8 = 0$: a = -2, b =-6 et c =8
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times (-2) \times 8 = 36+64=100$
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1 = \frac{6+\sqrt{100}}{2\times(-2)} = \frac{6+10}{-4} = \frac{16}{-4} = -4$ et $x_2 = \frac{6-\sqrt{100}}{2\times(-2)} = \frac{6-10}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$

Donc : $S = \{-4;1\}$

b) $-x^2 - 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 6x + 8 \geq 0 \times 2$

$-x^2 - 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 6x + 8 \geq 0$

Les racines sont : $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$-x^2-3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où : $S = [-4;1]$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \quad (1) \\ -x + y = -1 \quad (2) \times -1 \end{cases}$$

$(2)+(1) \quad x - 2y - x + y = -3 - 1$

Équivaut à : $-y=-4$

Équivaut à : $y=4$ et on remplace dans : $x-y=1$

Équivaut à : $x-4=1$

Équivaut à : $x=1+4=5$

Donc : $S=\{(5,4)\}$

b) Déduction de la résolution du système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x-2y^2=-3 \\ x-y^2=1 \end{cases}$

On pose : $x=X$ et $y^2=Y$

$$\begin{cases} x-2y^2=-3 \\ x-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X-2Y=-3 \\ X-Y=1 \end{cases}$$

D'après 2) a) on a donc : $X=5$ et $Y=4$

Donc : $x=5$ et $y^2=4$

Donc : $x=5$ et $\left(y=\sqrt{4}\ ou\ y=-\sqrt{4}\right)$

Donc : $x=5$ et $\left(y=2\ ou\ y=-2\right)$

Donc : $S=\{(5,2);(5,-2)\}$

Exercice2 :

1) Calcul de : $f(0)$ et $f(1)$

On a : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

Donc : $f(0)=\frac{1}{3}0^3-0=0-0=0$

$f(1)=\frac{1}{3}1^3-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ L'équation : $f(x)=0$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3-x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ \frac{1}{3}x^2-1=0$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ \frac{1}{3}x^2=1\Leftrightarrow x=0\ ou\ x^2=3\Leftrightarrow x=0\ ou\ x=\sqrt{3}ou\ x=-\sqrt{3}$$

Donc : $S=\left\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\right\}$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)'=\frac{1}{3}3x^2-1=x^2-1=x^2-1^2=(x-1)(x+1)$

5) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x-1=0\ ou\ x+1=0\Leftrightarrow x=1\ ou\ x=-1$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x)=x^2-1$ $a=1\succ0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[-1;1]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2/3$	$\searrow$	$-2/3$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$f(1)=\frac{1}{3}1^3-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

6) la droite (T) est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

7) Détermination de l'équation de (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T): y=f(0)+f'(0)(x-0)$

On a : $f(0)=0$ Et on a : $f'(x)=x^2-1$

Donc : $f'(0)=0^2-1=-1$

Donc : $(T): y=0-1(x-0)$

Donc : $(T): y=-x$

8) Résolution dans $\mathbb{R}$ L'inéquation : $f(x)\geq -x$

Résolution algébrique : $f(x)\geq -x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-x\geq -x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3\geq 0 \Leftrightarrow 3\times\frac{1}{3}x^3\geq 3\times 0 \Leftrightarrow x^3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $S=[0;+\infty[$

Résolution graphique : $f(x)\geq -x$

La courbe (C_f) est au-dessus de la tangente (T) si $x\in[0;+\infty[$

Donc : $S=[0;+\infty[$

Exercice3 : 1) la raison r ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 10 et p=6 on a : $u_{10} = u_6 + (10-6)r$

Donc : $u_{10} = u_6 + 4r$

Donc : $35 = 23 + 4r \Leftrightarrow 4r = 35 - 23 \Leftrightarrow 4r = 12 \Leftrightarrow r = \frac{12}{4} = 3$

On a : $u_n = u_0 + nr$ donc : $u_6 = u_0 + 6r$

Donc : $23 = u_0 + 6\times 3$

Donc : $23 - 18 = u_0$

Donc : $u_0 = 5$

2) Calcul de la somme suivante : $S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 5$ et sa raison $r = 3$

$$S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013} = (2013 - 1996 + 1)\frac{u_{1996} + u_{2013}}{2} = 18\frac{u_{1996} + u_{2013}}{2}$$

On a : $u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$

Donc : $u_{1996} = 5 + 1996\times 3 = 5 + 5988 = 5993$

Et $u_{2013} = 5 + 2013\times 3 = 5 + 6039 = 6044$

$$S = 18\frac{5993 + 6044}{2} = 18\frac{12037}{2} = 9\times 12037 = 228703$$

3)On a : $v_n = 2^{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{u_{n+1}}}{2^{u_n}} = 2^{u_{n+1} - u_n} = 2^3 = 8 = q$

Par suite : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$

Exercice4 :

1) Le nombre de tirages possibles est : $card\,\Omega = 7\times 7 = 7^2 = 49$

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
7	7

2) le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches est : $3\times 3 = 3^2 = 9$

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
B 3	B 3

3) le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges est :
$4\times 4 = 4^2 = 16$

1^{ier} tirage	2^{er} tirage
R 4	R 4

4) Tirer 2 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 2 boules blanches **OU** tirer 2 boules rouges **OU** c'est : **+**

1^{ier} tirage	**2^{er} tirage**
B 3	B 3

Ou

1^{ier} tirage	**2^{er} tirage**
R 4	R 4

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs est : $3^2+4^2=9+16=25$

5) tirer 2 boules de couleurs différentes signifie : tirer 1 boule blanche **ET** tirer 1 boule rouge **ET** c'est : **X** mais attention à l'ordre

1^{ier} tirage	**2^{er} tirage**
B 3	R 4

OU

1^{ier} tirage	**2^{er} tirage**
R 4	B 3

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes est : $3\times4+4\times3=12+12=24$

Methode2 : 49 -25= **24** possibilités