Région de Fès Meknès (Taza Taounat)
2012 (Session Rattrapage)

Exercice1 : 5points (3pt +2pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{16}=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{16}\geq 0$

3) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+5y=23 \end{cases}$

Exercice2 : 3points (.5pt +1.5pt)

Une urne contient 12 boules :
4 boules blanches et 6 boules rouges et 2 boules vertes
On tire au hasard **3** boules successivement et sans remise
1) Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ? ($card\,\Omega=?$)
2) Quel est le nombre de possibilités de tirer 3 boules de mêmes couleurs

Exercice3 : 8points (1pt +2pt +1.5pt +1pt+ +1.5pt +1pt)

Soient f la fonction définie sur R par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative

1) Calculer : $f(0)$ et $f(-3)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=(x+3)^2$

4) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1

Exercice4 : 4points (2pt +2pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_0=-5$ et $u_{10}=25$

Et Soit la suite $(v_n)_n$ géométrique tel que : $v_0=3$ et $v_2=12$

1) a) Déterminer la raison de la suite $(u_n)_n$

b) Calculer : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

2) a) Déterminer q la raison de la suite $(v_n)_n$ sachant que : $q\succ 0$

b) Ecrire v_n en fonction de n

Solution :

Exercice1 :

1) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{16} = 0$

a = 1, b =-3/2 et c = -7/16

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\times1\times\left(-\frac{7}{16}\right) = \frac{9}{4} + \frac{28}{16} = \frac{36}{16} + \frac{28}{16} = \frac{64}{16} = 4$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1 = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) + \sqrt{4}}{2\times1} = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ et

$x_2 = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) - \sqrt{4}}{2\times1} = \frac{\frac{3}{2}-2}{2} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{4}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

2) $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{16} \geq 0$

Les racines sont : $x_1 = \frac{7}{4}$ et $x_2 = -\frac{1}{4}$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{16}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $S = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$

3) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 10 & \times(-2)\,(1) \\ 4x + 5y = 23 & (2) \end{cases}$

$(2)+(1) \quad -4x - 6y + 4x + 5y = 10 + 23$

Équivaut à : $-y = 33$

Équivaut à : $y = -33$ et on remplace dans : $4x + 5y = 23 \;\; (2)$

Équivaut à : $4x + 5(-33) = 23$

Équivaut à : $4x - 165 = 23$

Équivaut à : $4x = 23 + 165$

Équivaut à : $4x = 188$

Équivaut à : $x = \frac{188}{4} = 47$

Donc : $S = \{(47, -33)\}$

Exercice2 :

1) Il s'agit clairement d'une situation d'arrangement puisque chaque tirage est un arrangement de 3 éléments dans un ensemble de 12 éléments :

Donc le nombre de tirages possibles est : $card\,\Omega = A_{12}^{3} = 12\times11\times10 = 1320$

2) Tirer 3 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 3 boules rouges **OU** tirer 3 boules blanches **OU** c'est : **+**

1^{ier} tirage	2^{er} tirage	3^{er} tirage
R : 6	**R : 5**	**R : 4**

OU

1^{ier} tirage	2^{er} tirage	3^{er} tirage
B : 4	**B :3**	**B : 2**

Le nombre de possibilités de tirer 3 boules de mêmes couleurs est :

$A_6^3 + A_4^3 = 6\times5\times4 + 4\times3\times2 = 120 + 24 = 144$

Exercice3 :

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7$

$f(0) = \frac{1}{3}\times0^3 + 3\times0^2 + 9\times0 + 7 = 7$

$f(-3) = \frac{1}{3}\times(-3)^3 + 3\times(-3)^2 + 9\times(-3) + 7 = \frac{-27}{3} + 27 - 27 + 7 = -9 + 7 = -2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$

3) Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x) = (x+3)^2$?

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7\right)' = \frac{1}{3}\times3x^{3-1} + 3\times2x^{2-1} + 9 + 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\times x\times3 + 3^2 = (x+3)^2$

4) Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = (x+3)^2 \geq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

5) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a : $a = -3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3

Est : $(T): y = f(-3) + f'(-3)(x-(-3))$

On a : $f(-3) = -2$

Et on a : $f'(x) = (x+3)^2$

Donc : $f'(-3)=(-3+3)^2=0$

Donc : $(T): y=-2+0(x+3)$

Donc : $(T): y=-2$

Exercice4 :

1) a) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_0=-5$ et $u_{10}=25$

Donc : $u_n=u_p+(n-p)r$

On pose : n=10 et p=0

Donc : $u_{10}=u_0+(10-0)r$

Donc : $25=-5+10r$

Donc : $25+5=10r$

Donc : $30=10r$

Donc : $r=\frac{30}{10}=3$

b) Calcul de la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

Donc : $S=11\frac{-5+25}{2}=11\frac{20}{2}=11\times10=110$

2) a) Puisque $(v_n)_n$ est géométrique tel que : $v_0=3$ et $v_2=12$

Alors on a : $v_n=v_p\times q^{n-p} \quad \forall(n;p)\in\mathbb{N}^2$

Pour p=0 et n=2 On a : $v_2=v_0\times q^{2-0}$

Donc : $12=3\times q^2$

Donc : $\frac{12}{3}=q^2$

Donc : $q^2=4$

Donc : $q=\sqrt{4}$ ou $q=-\sqrt{4}$ or $q\succ0$

Donc : $q=\sqrt{4}=2$

b) Puisque $(v_n)_n$ est géométrique

Alors on a : $v_n=v_0\times q^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $v_n=3\times2^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$