Région de Fès Meknès (Taza Taounat) (2012) (Session Normale)

Exercice 1 : 5points (1.5pt+1.5pt +2pt)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $-4x^2+3x+1=0$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation suivante : $-4x^2+3x+1\succ 0$

2) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x+y=6 \end{cases}$

Exercice2 : 8points (1pt +2pt +1.5pt +1pt+ +1pt 1.5pt)

Une urne contient 15 boules :

5 boules blanches et 7 boules rouges et 3 boules vertes

On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de couleur différentes deux a deux ?

Exercice 3 : 4points (2pt +2pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5=-7$ et $u_8=2$

et Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n=25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) a) Vérifier que la raison de la suite $(u_n)_n$ est : $r=3$

b) Calculer : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6$

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{5}{3}$

b) Calculer la somme suivante : $S_2=v_0+v_2+\cdots+v_6$

Exercice4 : 8points (1pt +2pt +1.5pt +1pt+ +1pt 1.5pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$

1) Calculer : $f(0)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

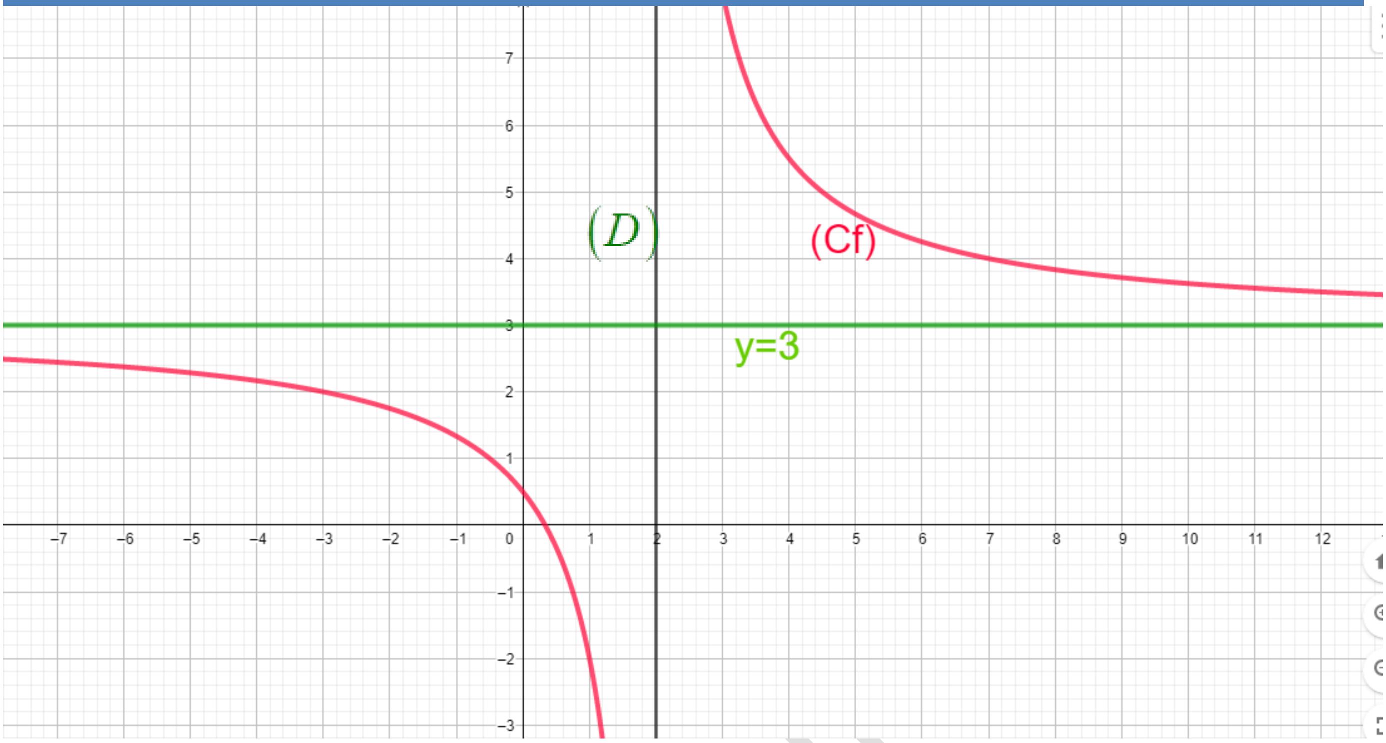
3) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f'(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}$

4) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}-\{2\}$

5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3

6)La courbe représentatives (C_f) est donnée dans le repère ci-dessous :

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq 3$



Solution :

Exercice 1 :

1) Calculons le discriminant de l'équation $-4x^2+3x+1=0$: a = -4, b =3 et c =1

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-4) \times 1 = 9+16=25$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-4)} = \frac{-3+5}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-4)} = \frac{-3-5}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{4};1\right\}$

b) $-4x^2+3x+1 \succ 0$

Les racines sont : $x_1 = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = 1$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-1/4$		1		$+\infty$
$-4x^2+3x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où : $S = \left]-\frac{1}{4};1\right[$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x+y=6 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=8 & (1)\times -2 \\ 4x+y=6 & (2) \end{cases}$$

$(2)+(1)$ $\quad -4x+6y+4x+y=8+6$

Équivaut à : $7y=14$

Équivaut à : $y=2$ et on remplace dans : $2x-3y=-4$

Équivaut à : $2x-6=-4$ c'est-à-dire : $2x=2$

Équivaut à : $x=1$ Donc : $S=\{(1,2)\}$

Exercice 2:

1) Dans l'urne il Ya :15 boules et on tire **simultanément** 3 boules de cette urne

Donc : $card(\Omega)=C_{12}^{3}$

$$C_{15}^{\ 3}=\frac{15!}{3!(15-3)!}=\frac{15!}{3!12!}=\frac{15\times14\times13\times12!}{3!12!}=\frac{15\times14\times13}{3!}=\frac{3\times5\times2\times7\times13}{6}=455$$

2) tirer3 boules de couleurs différentes deux a deux signifie : tirer 1 boule blanche **ET** tirer 1 boule rouge **ET** tirer 1 boule verte

ET c'est : **X**

Le nombre de possibilités de tirer 3 boules de couleurs différentes deux a deux est :

Exercice 3:

1) a) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5=-7$ et $u_8=2$

Donc : $u_n=u_p+(n-p)r$

On pose : n=8 et p=5

Donc : $u_8=u_5+(8-5)r$

Donc : $2=-7+3r$

Donc : $2+7=3r$

Donc : $9=3r$ c'est-à-dire : $r=\frac{9}{3}=3$

b) Calcul de la somme suivante : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$$S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6=(6-0+1)\frac{u_0+u_6}{2}$$

On a : $u_n=u_p+(n-p)r$

Donc : $u_8=u_0+(8-0)\times3$

Donc : $2=u_0+24$

Donc : $2-24=u_0$ Donc : $-22=u_0$

Et on a : $u_n=u_p+(n-p)r$

Donc : $u_6=u_0+(6-0)3$

Donc : $u_6=-22+18=-4$

Donc : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6=7\frac{-22+(-4)}{2}=7\frac{-26}{2}=7\times(-13)=-91$

2) a) On a : $v_n=25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n}}=\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{n}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1-n}=\left(\frac{5}{3}\right)^{1}=\frac{5}{3}=q$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q=\frac{5}{3}$

3) Puisque la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q=\frac{5}{3}$

Alors : $S_2=v_0+v_2+\cdots+v_6=v_0\frac{1-q^{6-0+1}}{1-q}$

On a : $v_n=25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n}$

Pour n=0 : on a :$v_0=25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{0}$ par suite : $v_0=25\times1=25$ car $\left(\frac{5}{3}\right)^{0}=1$

$$S_2=25\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{7}}{1-\frac{5}{3}}=25\times\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{7}}{-\frac{2}{3}}=-25\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^{7}\right)=-\frac{75}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^{7}\right)$$

Exercice 4 : 1) Calcul de : $f(0)$ *et* $f\left(\frac{1}{2}\right)$

On a : $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$

Donc : $f(0)=\frac{3\times0-1}{0-2}=\frac{0-1}{0-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{4}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$

a) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-1}{x-2}$

On a: $\lim\limits_{x\to2^+}3x-1=6-1=5$ **et** $\lim\limits_{x\to2^+}x-2=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to2^+}x-2=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to2^+}3x-1=6-1=5$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x-1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} x-2=0^-$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-1=6-1=5$ Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$; $f'(x)=\left(\dfrac{3x-1}{x-2}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x-2)-(3x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{3(x-2)-1\times(3x-1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x-6-3x+1}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}$$

4) $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2}\prec 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Donc : f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$3 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$

5) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3

Est : $(T):y=f(3)+f'(3)(x-3)$

On a : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$

Donc : $f(3)=\dfrac{3\times3-1}{3-2}=\dfrac{9-1}{1}=8$

Et on a : $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$

Donc : $f'(3)=\dfrac{-5}{(3-2)^2}=\dfrac{-5}{1^2}=-5$

Donc : $(T):y=8-5(x-3)$

Donc : $(T):y=8-5x+15$

Donc : $(T):y=-5x+23$

6)Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\geq 3$?

La courbe (C_f) est au-dessus de la droite : $(D):y=3$ si $x\in]2;+\infty[$

Donc $S=]2;+\infty[$