

# BARYCENTRE

## I) ACTIVITES

**Activité 1 :** Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur  $1m$  on considère deux boules métalliques de  $500g$  en  $A$  et de  $350g$  en  $B$ .  $M$  un point sur la barre. Déterminer la position de  $M$  sachant que le système est en équilibre.



**Activité 2 :** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  et  $AC = 2AB$ .

1- Montrer qu'il existe un et un seul point  $G$  tel que :  $2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point  $G$ .

3- Si le plan est rapporté au repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI})$

où  $I$  est milieu de  $[AC]$ , quels seront les coordonnées du point  $G$ .

## II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

### 1) Vocabulaires

**Définitions :** Soit  $A$  un point et  $\alpha$  un réel non nul ; le couple  $(A, \alpha)$  s'appelle un point pondéré. Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

### 2) Barycentre de deux points pondérés.

#### 2.1 Définition.

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  ; le barycentre du système pondéré  $\Sigma$  est le point  $G$  qui vérifie :

$$\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

On écrit :  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

#### 2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  On a donc :

$$\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

et par suite : pour tout réel  $k$  non nul on a :

$$k\alpha\overrightarrow{AG} + k\beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

Et donc  $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ .

#### Propriété :

**a)** Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

**b)** Si  $\alpha = \beta$  le barycentre du système pondéré

$\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  s'appelle l'isobarycentre de  $A$  et  $B$  qui n'est que le milieu du segment  $[AB]$ .

#### Construction :

**Exemple1 :** Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$  donc :  $4\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$$4\overrightarrow{AG} + 5(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB}$$

Donc le point  $G \in (AB)$



#### Exemple2 :

Construire  $G = \text{Bar}\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$$G = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}))\}$$

Donc :  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$

• Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  On a donc par suite :

$$\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

Soit  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$

on a donc :

$$\alpha(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}) + \beta(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

D'où : on conclut que :  $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MB}$

**Propriété :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ . Pour tout point  $M$  du

plan  $(P)$  on a :  $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MB}$

ou  $(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

**Propriété :** Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Preuve :** Il suffit d'utiliser la propriété

précédente en posant  $A = M$  dans la propriété :

$$\text{On aura : } \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

D'où les vecteurs  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires et par suite : les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Propriété :** Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  des points du plan et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  on a :

$$\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{OB}$$

et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

**Preuve :** (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant  $A = O$ )

**Exemples :** 1) Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(3; 2)$  et  $B(4; 1)$

Et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -5)\}$

**Solution :** on a :  $\begin{cases} x_G = \frac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \frac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$  donc

$$\begin{cases} x_G = \frac{17}{4} \\ y_G = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc :  $G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$

**Exercice1 :** Soit  $ABC$  un triangle et soit :

$$I = \text{Bar}\{(B, 4); (C, -3)\}$$

Déterminer les coordonnées du point  $I$  dans le repère  $R(A; \vec{AB}; \vec{AC})$

**Solution :** on a : donc  $(4 + (-3))\vec{AI} = 4\vec{AB} - 3\vec{AC}$

donc  $\vec{AI} = 4\vec{AB} - 3\vec{AC}$  donc dans le repère  $R(A; \vec{AB}; \vec{AC})$   $I(4; -3)$

**Exercice2 :**  $E$  et  $F$  deux points du plan tels que :  $\vec{EG} = 2\vec{EF}$  et  $E \notin (AB)$  et  $G$  est le barycentre des points  $(A; 2)$  et  $(B; -3)$

1) Montrer que  $G$  est le barycentre des points  $(E; -1)$  et  $(F; 2)$

2) en déduire que les droites  $(EF)$  et  $(AB)$  se coupent et déterminer le point d'intersection

**Solution :**  $\vec{EG} = 2\vec{EF} \Leftrightarrow \vec{EG} = 2(\vec{EG} + \vec{GF})$

$$\Leftrightarrow \vec{EG} = 2\vec{EG} + 2\vec{GF} \Leftrightarrow -\vec{EG} - 2\vec{GF} = \vec{0}$$

$-\vec{GE} + 2\vec{GF} = \vec{0}$  Donc  $G$  est le barycentre des points  $(E; -1)$  et  $(F; 2)$

2) on a  $G$  le barycentre des points  $(E; -1)$  et  $(F; 2)$

donc  $G \in (EF)$  et on a  $G$  est le barycentre des

points  $(A; 2)$  et  $(B; -3)$  donc  $G \in (AB)$

Donc les droites  $(EF)$  et  $(AB)$  se coupent en  $G$

**Exercice3 :** Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(0; 5)$  et  $B(3; 2)$

Et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de  $G$

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

$$(C) = \{M \in (P) / \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6\}$$

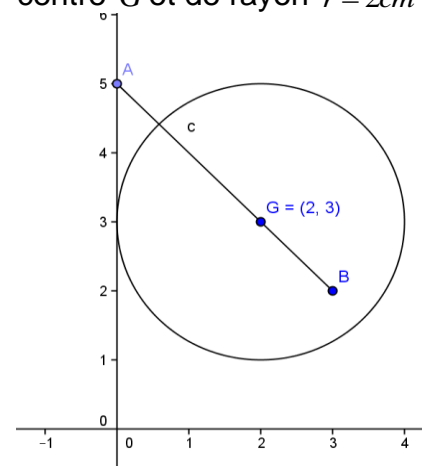
**Solution :**  $\begin{cases} x_G = \frac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$  donc  $G(2; 3)$

D'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6\text{cm} \Leftrightarrow \|\vec{3MG}\| = 6\text{cm}$

$$\Leftrightarrow 3\|\vec{MG}\| = 6\text{cm} \Leftrightarrow 3MG = 6\text{cm} \Leftrightarrow MG = 2\text{cm}$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $r = 2\text{cm}$



**3) Barycentre de trois points pondérés**

**Propriété et définition :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie :

$$\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$$

Qui s'appelle barycentre du système pondéré  $\Sigma$

**Propriété :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

Un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

si  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$

$$\text{on a : } \vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MC}$$

Donc :  $(\alpha + \beta + \gamma)\vec{MG} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$

**Preuve :** Même démonstration que dans le cas précédent.

**Construction :**

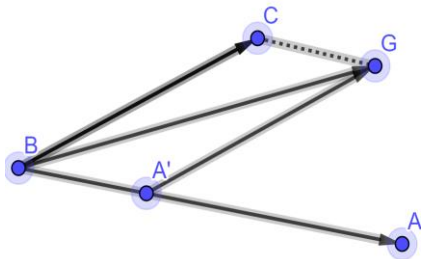
• **Exemple :**

1° Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$   
 $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$  donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(1 + (-1) + 3)\overline{MG} = 1\overline{MA} + (-1)\overline{MB} + 3\overline{MC}$$

On pose :  $M = B$  on aura :

$$3\overline{BG} = \overline{BA} + 3\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \overline{BC}$$

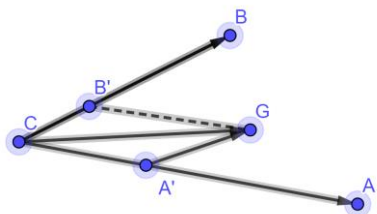


2° Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$   
 Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(4 + 1/2 - 3)\overline{MG} = 4\overline{MA} + 1/2\overline{MB} - 3\overline{MC}$$

On pose :  $M = C$  on aura :

$$\frac{3}{2}\overline{CG} = 4\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{8}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$$



**Exercice 4 :** Soit  $ABC$  un triangle et  $G$  point tel que :  $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB}$

1) montrer que  $G$  le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$  et construire le point  $G$

**Solution :**  $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB} \Leftrightarrow 2\overline{AC} - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0}$

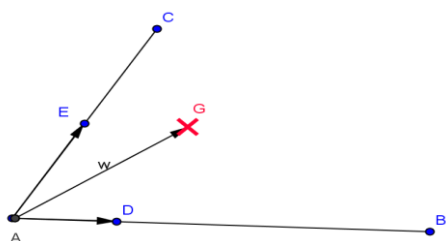
$$\Leftrightarrow 2(\overline{AG} + \overline{GC}) - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

Donc  $G$  le barycentre de :  $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

$$\text{On a : } \textcircled{R} \quad \overline{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}$$

$$\text{Donc : } \overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{2}{4}\overline{AC} \quad \text{donc : } \overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$$



**Propriété :** Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$

des points du plan

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

$$\text{on a : } \overline{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overline{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overline{OC}$$

et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :

$\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} =$

$\text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$  pour  $k \neq 0$

**Exercice :**

Soit  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  où  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors :  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Remarque :** La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

**Exercice 5 :** on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre  $G$  du système pondéré  $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

**Solution :** soit  $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$-\overline{ME} = 2\overline{MA} - 3\overline{MB}$$

On pose :  $M = A$  on aura :  $-\overline{AE} = -3\overline{AB}$

$$\text{Donc : } \overline{AE} = 3\overline{AB}$$

D'après la Propriété d'associativité on a :

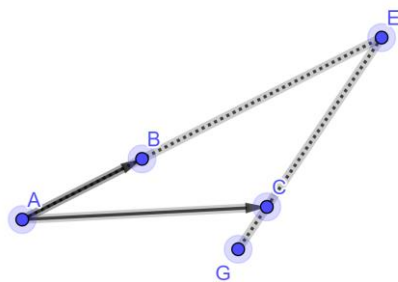
$G = \text{Bar}\{(E, -1); (C, 5)\}$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$4\overline{MG} = -\overline{MA} + 5\overline{MC}$$

On pose :  $M = E$  on aura :

$$4\overline{EG} = 5\overline{EC} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{5}{4}\overline{EC}$$



### Cas particulier

Si les poids  $\alpha$ ;  $\beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$

S'appelle **le centre de gravité** du triangle  $ABC$ .

**Exercice 6 :** Soit  $ABC$  un triangle et  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$  et  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ . Montrer que  $G$  est le centre de gravité de  $(A;1)$  et  $(I;2)$

**Solution :**  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$

Donc  $G$  est le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$$

$I$  le milieu du segment  $[BC]$  Donc  $I$  est le

barycentre de :  $\{(B, 1); (C, 1)\}$

D'après la Propriété d'associativité on a :

$G$  est le barycentre de :  $\{(I, 2); (A, 1)\}$

**Exercice 7 :** Soit  $ABC$  un triangle. Pour tout

point  $M$  on pose :  $\vec{v} = 2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}$

1) Réduire l'écriture de  $\vec{v}$  et montrer que  $\vec{v}$  ne dépend pas du point  $M$

2) soit  $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$  montrer que :

$$\vec{v} = 2\vec{KA}$$

3) Soit  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$

Montrer que : Pour tout point  $M$  on a :

$$2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{GM}$$

4) en déduire l'ensemble des points  $M$  tel que

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\|$$

**Solution :** 1)

$$\vec{v} = 2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} - 3(\vec{MA} + \vec{AC})$$

$\vec{v} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$  donc  $\vec{v}$  ne dépend pas du point  $M$

2) on a :  $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$  Pour tout point  $M$  donc si  $M = K$  on aura :

$$2\vec{KA} + \vec{KB} - 3\vec{KC} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$$

Et on a :  $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$  donc :  $\vec{KB} - 3\vec{KC} = \vec{0}$

Donc :  $2\vec{KA} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$  donc :  $2\vec{KA} = \vec{v}$

3) d'après la propriété caractéristique du

Barycentre on a :

$$2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC} = (2 + (-1) + (-3))\vec{MG} = -2\vec{MG} = 2\vec{GM}$$

$$4) \|2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\vec{GM}\| = \|2\vec{KA}\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$$

Donc l'ensemble des points est le cercle  $(C)$  de centre  $G$  et de rayon  $r = KA$

**Exercice 8 :** Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$AC = 6\text{cm}$  et  $AB = 5\text{cm}$  et  $BC = 4\text{cm}$

a) Construire  $G$  le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$$

b) Déterminer et Construire l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  du plan tel que :  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble  $(F)$  des points  $M$  du plan tel que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} + 2\vec{MC}\|$$

**Solution :**  $G$  est le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$  donc  $G$  est le barycentre de :  $\{(B, 2); (I, 2)\}$  d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc  $G$  est le milieu du segment  $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$\|4\vec{MG}\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $r = 1.5\text{cm}$

b) Soit  $G'$  est le barycentre de :

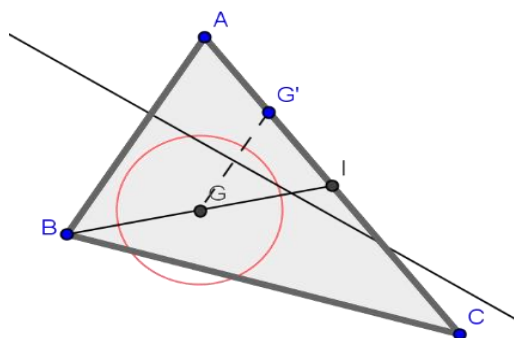
$\{(A, 3); (C, 1)\}$  Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :  $\forall M \in (P)$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG} \text{ et } 3\vec{MA} + \vec{MC} = 4\vec{MG}'$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$$

Donc :  $(F)$  est la médiatrice du segment  $[GG']$

Et pour construire le point  $G'$  on a :  $\vec{AG}' = \frac{1}{4}\vec{AC}$



4) **Barycentre de quatre points pondérés**

**Propriété :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$   
Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie

$$: \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Qui s'appelle barycentre du système pondéré  $\Sigma$   
**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  et  
 $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

si  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$

$$\text{on a : } \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{s} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{s} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{s} \overrightarrow{MC} + \frac{\delta}{s} \overrightarrow{MD}$$

où  $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

**Preuve :** Même démonstration que dans les cas précédents.

**Propriété :** Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$

et  $D(x_D; y_D)$  des points du plan

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

$$\text{on a : } \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{s} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{s} \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{s} \overrightarrow{OC} + \frac{\delta}{s} \overrightarrow{OD}$$

Et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$

où  $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

**Propriété :** Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

Non nul :  $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$

pour  $k \neq 0$

**Propriété :** Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$

Si  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

et  $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

**Remarque :** La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

**Exercice9 :** Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(-1; 1)$  et  $B(0; 2)$  et  $C(1; -1)$

et  $D(1; 0)$  Et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de

$K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$

2) Déterminer les coordonnées de  $L$  le centre de gravité du triangle  $ABC$

3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points  $(A; 2)$  et  $(B; 3)$  et  $(C; 1)$  et  $(D; -1)$

$$\text{Solution : 1) } \begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ donc } K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

2) les coordonnées de  $L$  sont :

$$\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc  $L\left(0; \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{2x_A + 3x_B + 1x_C + (-1)x_D}{5} = \frac{-2}{5} \\ y_G = \frac{2x_A + 3x_B + 1x_C + (-1)x_D}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$

**Application :**  $ABCD$  un rectangle tel que :  $AB = 2BC$  Construire le barycentre du système pondéré  $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$

**Cas particulier :** Si les poids  $\alpha; \beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de :  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \delta)\}$  s'appelle le **centre de gravité** du quadrilatère convexe  $ABCD$

**Exercice10 :** soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe

Soit  $H$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, 2); (B, 5); (C, -1)\}$

Soit  $K$  le barycentre du système pondéré  $\{(B, 5); (C, -1); (D, 6)\}$

Soit  $E = \text{Bar}\{(C, -1); (B, 5)\}$

1) Montrer que  $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  et Construire  $E$

2) Montrer que  $H$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A, 1); (E, 2)\}$  et Construire  $H$

3) Montrer que  $K$  est le barycentre du système pondéré  $\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrer que  $D$  est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$

b) en déduire que  $(AK) \parallel (DH)$

**Solution :**

1) on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overline{ME} = \frac{1}{4}(5\overline{MB} - \overline{MC})$$

Pour : M=B on a :  $\overline{BE} = -\frac{1}{4}\overline{BC}$  et on peut

Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}  
et  $5 + (-1) = 4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2) ; (E, 4)} et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)}

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overline{MH} = \frac{1}{3}(2\overline{ME} + \overline{MA})$$

Pour : M=A on a :  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AE}$  et on peut

Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système Pondéré {(D, -6) ; (E, 4)}

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?

Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overline{MK} = -3\overline{MD} + 2\overline{ME}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{MD} = \overline{MK} + 2\overline{ME}$$

Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$$3\overline{MH} = 2\overline{ME} + \overline{MA} \text{ et } 3\overline{MD} = 2\overline{ME} + \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = 3\overline{MH} - 3\overline{MD} \quad :$$

$$3\overline{DH} = 3(\overline{MH} - \overline{MD})$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = \overline{MA} - \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = -\overline{AK} \quad \text{Donc : } (AK) \parallel (DH)$$

**Exercice11 :** ABC un triangle

I et J et K points tels que :  $2\overline{BI} = 3\overline{BC}$

$$\text{Et } 8\overline{CJ} = \overline{CA} \text{ et } 5\overline{AK} = 2\overline{AB}$$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et  $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) Le plan (P) est rapporté au repère

$$R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

**Solution :** 1)

$$\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}(\overline{CB} + \overline{BI})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CB} - \frac{3}{2}\overline{BI} = -\overline{BI} + \frac{3}{2}\overline{BC} = -\frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{3}{2}\overline{BC} = \vec{0}$$

Donc :  $\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \vec{0}$  par suite : I est le

barycentre des points pondéré  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et  $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère  $R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$  on a : A(0;0) et

B(1;0) et C(0;1)

a) On a :  $8\overline{CJ} = \overline{CA}$  donc :  $8\overline{CA} + 8\overline{AJ} = \overline{CA}$

$$\text{Donc : } 8\overline{AJ} = -7\overline{CA} \text{ donc : } \overline{AJ} = \frac{7}{8}\overline{AC}$$

$$\text{Donc : } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

$\overline{IK}$  et on a : I est le barycentre de  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et

$$\left(C; \frac{-3}{2}\right) \text{ donc : } \begin{cases} x_I = \frac{\frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 0}{-1} = -\frac{1}{2} \\ y_I = \frac{\frac{1}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1}{-1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Et on a :  $5\overline{AK} = 2\overline{AB}$  Donc :  $\overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

$$\text{Donc : } K\left(\frac{2}{5}; 0\right) \text{ Donc : } \overline{IK}\left(\frac{9}{10}; \frac{3}{2}\right)$$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + c = 0$$

$$I \in (IK): \text{ donc : } \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) - \frac{9}{10} \left( \frac{3}{2} \right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} - \frac{27}{20} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{21}{10}$$

$$\text{Donc : } (IK): \frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + \frac{21}{10} = 0$$

$$(IK): 15x - 9y + 21 = 0$$

c) pour Montrer que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés il suffit de montrer que  $J \in (IK)$

$$\text{On a : } (IK): 15x - 9y + 21 = 0 \text{ et } J \left( 0; \frac{7}{8} \right)$$

$$\text{Et on a : } 15 \times 0 - 9 \frac{7}{8} + 21 = -21 + 21 = 0$$

Par suite :  $J \in (IK)$  donc les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice12 :** ABC un triangle et  $I$  un point tel que :  $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$  et  $K$  le symétrique de  $A$  par rapport a  $C$  et  $J$  le milieu du segment  $[BC]$

1) exprimer  $I$  et  $J$  et  $K$  comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés  $(A;1) ; (B;2) ; (B;-2)$  et  $(C;-2)$  ?

3)Monter que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Solution :**1)

• On a  $J$  le milieu du segment  $[BC]$

Donc :  $J$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$

• On a :  $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB} \Leftrightarrow 3\overline{AI} = 2\overline{AB} \Leftrightarrow 3\overline{AI} = 2\overline{AI} + 2\overline{IB}$

$\Leftrightarrow \overline{IA} + 2\overline{IB} = \overline{0}$  Donc :  $I$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(B;2)$

• On a :  $K$  le symétrique de  $A$  par rapport a  $C$

Donc :  $2\overline{KC} = \overline{KA}$

Donc :  $\overline{KA} - 2\overline{KC} = \overline{0}$

Donc :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(C;-2)$

2) on a :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(C;-2)$  donc :

$$1\overline{KA} + 2\overline{KB} - 2\overline{KB} - 2\overline{KC} = \overline{0}$$

Donc :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(B;2)$  et  $(B;-2)$  et  $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que  $K$  le barycentre des points pondéré  $(J;-4)$

et  $(I;3)$  par suite :  $K \in (IJ)$  donc les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice13 :** ABCD un carré et  $I$  et  $J$  les milieux respectivement des segments  $[BC]$  et  $[CD]$  et  $M$  et  $N$  deux points tel que :  $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB}$

et  $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AD}$

1) déterminer le barycentre des points pondérés  $\{(A, 3) ; (B, 1)\}$  et  $\{(A, 3) ; (D, 1)\}$

2) soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A;3) ; (B;1) ; (C;1)$  et  $(D;1)$

3) Montrer que les droites  $(MJ)$  et  $(NI)$  et  $(AC)$  sont concourantes en  $G$

**Solution :** 1) on a :  $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB} \Leftrightarrow 4\overline{AM} = \overline{AM} + \overline{MB}$

Donc :  $3\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{0}$

Donc :  $M$  est le barycentre des points pondéré  $(A;3)$  et  $(B;1)$

De même on a :  $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AD} \Leftrightarrow 4\overline{AN} = \overline{AN} + \overline{ND}$

Donc :  $3\overline{NA} + \overline{ND} = \overline{0}$

Donc :  $N$  est le barycentre des points pondéré  $(A;3)$  et  $(D;1)$

2) soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A;3) ; (B;1) ; (C;1)$  et  $(D;1)$  et puisque  $J$  le milieu du segment  $[DC]$  alors  $J$  est le

barycentre des points pondéré  $(C;1)$  et  $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré  $(M;4)$  et  $(J;2)$  par suite :  $G \in (JM)$

De même on a :  $I$  le milieu du segment  $[BC]$  alors  $I$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$  et d'après La propriété

d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré  $(N;4)$  et  $(I;2)$  par suite :  $G \in (NI)$

Soit  $H$  le centre de gravité du triangle BCD donc

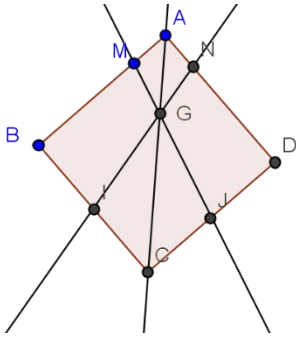
$H$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$  et  $(D;1)$  par suite D'après La propriété

d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré  $(A;3)$  et  $(H;3)$

donc :  $G$  le milieu du segment  $[AH]$  et puisque ABCD est un carré alors :  $H \in [AC]$  donc

$G \in (AC)$

Conclusion : les droites  $(MJ)$  et  $(NI)$  et  $(AC)$  sont concourantes en  $G$



**Exercice 14:** A et B deux points tel que :  $AB = 4\text{cm}$  et soit : (F) l'ensemble des points M du

plan tel que :  $\frac{MA}{MB} = 3$

1) montrer que :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0$

2) soit G le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3) et K le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;-3)

a) Montrer que :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

**Solution :** 1)  $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0$$

2)a)

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overline{MA} - 3\overline{MB})(\overline{MA} + 3\overline{MB}) = 0$$

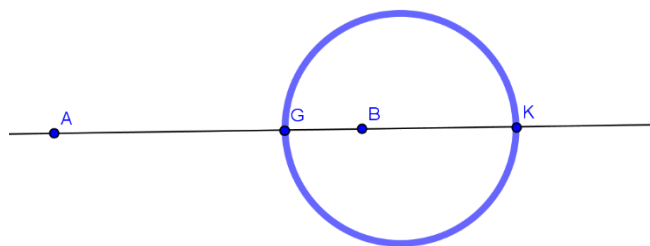
Et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$$\overline{MA} + 3\overline{MB} = 4\overline{MG} \quad \text{et} \quad \overline{MA} - 3\overline{MB} = -2\overline{MK}$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overline{MA} \cdot \overline{MK} = 0$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MK} = 0$$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est [GK]



**Exercice 15:** A et B deux points tel que :  $AB = 4\text{cm}$  et I le milieu du segment [AB]

1) soit : (E) l'ensemble des points M du plan tel que :  $\overline{IM} \cdot \overline{AB} = 4$  et soit H le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3)

a) Montrer que :  $H \in (E)$

b) Vérifier que :  $M \in (E) \Leftrightarrow \overline{HM} \cdot \overline{AB} = 0$

c) déterminer la nature de l'ensemble (E)

2) soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que :  $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que :  $\forall M \in (P)$  on a :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$$

b) En déduire que (F) = (E) et le tracer

**Solution :** 1) On a : H le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3) donc :  $\overline{AH} = \frac{3}{4}\overline{AB}$

$$\text{Et on a } \overline{IH} = \overline{IA} + \overline{AH} \quad \text{donc} \quad \overline{IH} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{AB}$$

$$\text{Donc } \overline{IH} = \frac{1}{4}\overline{AB} \quad \text{par suite} \quad \overline{IH} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$$

Donc  $H \in (E)$

b)  $M \in (E) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = \overline{IH} \cdot \overline{AB}$

$$\Leftrightarrow (\overline{IM} - \overline{IH}) \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \overline{HM} \cdot \overline{AB} = 0$$

c) de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

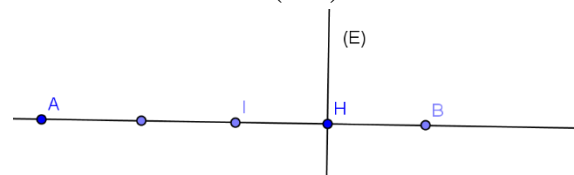
2)a)  $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overline{MA} - \overline{MB})(\overline{MA} + \overline{MB}) = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$

Car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a :  $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$

2)b)

$$M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$$

Donc (F) = (E) par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



**Solution 16 :** A et B deux points tel que :  $AB = 3\text{cm}$  et I le milieu du segment [AB]

1) soit : (C) l'ensemble des points M du plan tel que :  $MA^2 + MB^2 = 9$  et soit H le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3)

a) Montrer que :  $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b) Déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)



2) soit :  $(C')$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel

$$\text{que : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$$

a) Montrer que :  $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b) Déterminer la nature et tracer l'ensemble  $(C')$

**Solution :** 1) on a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

Car :  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

$$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$$

b) en déduit que  $(C)$  est le cercle de centre  $I$  et

de rayon  $r = \frac{3}{2}$

$$2) \text{ a) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Donc :  $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que  $(C')$  est le cercle de centre

$I$  et de rayon  $r = 1$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe*

