Région de l'oriental
(Oujda Nador Jerada Laâyoune)
(Session Rattrapage) 2015

Exercice1 : 4points (1.5pt+1pt+1.5pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que : sa raison $q=2$ et $u_5=96$

1) Vérifier que : $u_0=3$

2) Calculer : u_7

3) Calculer : $S=u_0+u_3+\cdots+u_7$

Exercice2 : 5points (1.5pt +1.5pt +1pt +1pt)

1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-2x-15=0$

2) a) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x+y=50 \\ 2x-y=10 \end{cases}$

b) 50 cyclistes dans les deux catégories : les enfants et adultes
Déterminer le nombre de coureurs de chaque catégorie si vous savez que deux fois le nombre de participants de la catégorie enfants dépasse de 10 le nombre de participants de la catégorie adulte

Exercice3 : 2points (1pt +1pt)

Une urne contient 6 boules numérotées comme suit :1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4
On tire 2 boules de l'urne simultanément.
1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
2) Quel est le nombre de tirages pour que les deux boules tirées soit pair ?

Exercice4 : 1point

Le prix d'une caméra a diminué de 24 %, le nouveau prix est 760 dh
Quelle était Le prix de la caméra avant la diminution ?

Exercice5 : 4points (2pt +2pt)

Soient les fonctions g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$g(x)=5x^2-10x+1$ et $h(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)$

2) Calculer : $g'(x)$ *et* $h'(x)$

Exercice6 : 4points (0.75pt +1.5pt+0.5pt+0.75pt+0.5pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^3+5x-3$

1) Calculer : $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)$ avec f' la fonction dérivée de f

b) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

3) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(2x-1)(2x^2+x+3)$

b) Etudie l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

Solution :

Exercice1 : 1) On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique :

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = q^n u_0$

Donc : $u_5 = q^5 u_0$

Donc : $96 = 2^5 u_0$

Donc : $96 = 32 \times u_0$

Donc : $u_0 = \frac{96}{32} = 3$

2) Calcul de : u_7

$u_7 = q^7 u_0 = 2^7 \times 3 = 128 \times 3 = 384$

3) Calcul de : $S = u_0 + u_3 + \cdots + u_7$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 7 - 0 + 1 = 8$

Donc : $S = u_0 \frac{1-2^8}{1-2} = 3\frac{1-256}{-1} = (-3)\times(-255) = 765$

Exercice2 : 1) Le discriminant de $x^2 - 2x - 15 = 0$ est

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64$ et ses solutions sont :

$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2\times 1} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$ et $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2\times 1} = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $S = \{-3; 5\}$

2) a) Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

Donc : $x + y + 2x - y = 50 + 10$

Équivaut à : $3x = 60$

Donc : $x = \frac{60}{3} = 20$ et on remplace dans : $x + y = 50$

$y = 50 - 20 = 30$

Donc : $S = \{(20, 30)\}$

b) Soit x le nombre d'enfants et y le nombre d'adultes.

On sait que :

- 50 cyclistes dans les deux catégories : cette donnée s'écrit : x + y = 50
- Deux fois le nombre de participants de la catégorie enfants dépasse de 10 le nombre de participants de la catégorie adulte :

Ces données s'écrivent :2x - y = 10

On retrouve les deux équations de la question précédente : $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

C'est à dire : $\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$

Par conséquent :

Les participants sont :20 enfants et 30 adultes.

Exercice3 : 1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 6 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est : $C_6^2=\frac{A_6^2}{2!}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

2)Pour que les deux boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules parmi 3: (2 ; 2 ; 4)

Donc : le nombre est : $C_3^2=\frac{A_3^2}{2!}=\frac{3\times2}{2\times1}=3$

Exercice4 : Soit M l'ancienne prix

Donc : $M-M\times\frac{24}{100}=760$

Il reste à résoudre l'équation :D’où : $M-0.24M=760$

D’où : $0.76M=760$ Ainsi $M=\frac{760}{0.76}=1000dh$

Régle : $A\left(1-\frac{t}{100}\right)=N$

Exercice5 : 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-10x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x-5}{x-2}$

On a **:** $\lim\limits_{x\to2^-} 2x-5=4-5=-1$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2=0^-$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

2) a) Calcul de : $g'(x)$

$g'(x)=\left(5x^2-10x+1\right)'=2\times5x^{2-1}-10+0$

$g'(x)=10x-10 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) Calcul de : $h'(x)=\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$h'(x)=\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)'=\frac{(2x-5)'(x-2)-(2x-5)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)-1\times(2x-5)}{(x-2)^2}$$

$$h'(x)=\frac{2x-4-2x+5}{(x-2)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}$$

Donc : $h'(x)=\frac{1}{(x-2)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Exercice6 : 1) On a : $f(x)=4x^3+5x-3$

Donc : $f(0)=4\times 0^3+5\times 0-3=0+0-3=-3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3+5x-3=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3+5x-3=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(4x^3+5x-3\right)'=4\times 3x^2+5-0=12x^2+5$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=12x^2+5\succ 0$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) a) Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(2x-1)(2x^2+x+3)$

$(2x-1)(2x^2+x+3)=2x\times 2x^2+2x\times x+2x\times 3-2x^2-x-3$

$(2x-1)(2x^2+x+3)=4x^3+2x^2+6x-2x^2-x-3$

$(2x-1)(2x^2+x+3)=4x^3+5x-3$

$(2x-1)(2x^2+x+3)=f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=(2x-1)(2x^2+x+3)$

b) Etudions l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses :
Les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Sont les solutions de l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x^2+x+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x-1=0 \;\; ou \;\; 2x^2+x+3=0$

$2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$2x^2+x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 2\times 3=1-24=-23\prec 0$

Donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

La courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point : $A\left(\frac{1}{2};0\right)$

4) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$?

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a
Est : $(T): y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=\frac{1}{2}$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

Est : $(T): y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

On a : $f(x) = 4x^3 + 5x - 3$

Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 4\frac{1}{8} + 5\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{6}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$

Et on a : $f'(x) = 12x^2 + 5$

Donc : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = \frac{12}{4} + 5 = 3 + 5 = 8$

Donc : $(T): y = 0 + 8\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Donc : $(T): y = 8x + 4$