Région de l'oriental
(Oujda Nador Jerada Laâyoune)
2015(Session Normale)

Exercice1 : 4points (1.5pt +1pt +1.5pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-11x+24=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2-11x+24\leq 0$

3) a) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=38 \end{cases}$

b) Ahmed et Maryam ont organisé une fête à l'occasion de leur réussite à l'examen.
Si le nombre d'amis invités par Maryam était de 6 de moins que ceux invités par Ahmed, et le nombre total d'amis invités était de 38.
Combien de personnes ont invitées chacune ?

Exercice2 : 4points (1.5pt +1pt +1.5pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r=4$ et $u_0=11$

1) Ecrire u_n en fonction de n et Vérifier que : $u_{50}=211$

2) trouver le nombre entier naturel n tel que : $u_n=2015$

3) Calculer la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{50}$

Exercice3 : 4points (2pt +2pt)

Soient les fonctions g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$g(x)=x^3+2x$ et $h(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to1^+} h(x)$

2) Calculer : $g'(x)$ *et* $h'(x)$

Exercice4 : 4points (1pt +0.5pt +0.75pt +1pt +0.75pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2-4x-3$

1) Calculer : $f(0)$ *et* $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=4(2x-1)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f

3) Déterminer les points d'intersections de la courbe de f avec l'axe des abscisses

4) Tracer la courbe (C_f) de f

Exercice5 : 3points (1pt +1pt +1pt)

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher

1)Déterminer le pourcentage des boules blanches dans l'urne

2)On tire simultanément 2 boules de cette urne.

a) Vérifier que le nombre de tirages possibles est 10

b) Combien y a-t-il de tirages contenant deux boules de même couleur ?

Solution :

Exercice1 : 1) le pourcentage des boules blanches dans l'urne est : $\frac{2}{5}\times 100=\frac{200}{5}=40\%$

2)a) Dans l'urne il Ya :5 boules et on tire **simultanément** 2 boules de cette urne

Donc : $card\,\Omega=C_5^2=\frac{A_5^2}{2!}=\frac{5\times 4}{2}=10$

Donc : Le nombre de tirages possibles est 10.

b) Tirer 2 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 2 boules blanches **OU** tirer 2 boules noires **OU** c'est : **+**

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs est : $C_2^2+C_3^2$

$C_3^2=\frac{A_3^2}{2!}=\frac{3\times 2}{2}=3$ et $C_2^2=1$ car :$C_n^n=1$

Donc : Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs est : $1+3=4$

Exercice2 :

1) Calculons le discriminant de l'équation $x^2-11x+24=0$: a = 1, b =-11et c = 24

Donc : Δ = b² – 4ac = (-11)² – 4 x 1 x 24 = 25.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1=\frac{11+\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{11+5}{2}=\frac{16}{2}=8$ et $x_2=\frac{11-\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{11-5}{2}=\frac{6}{2}=3$

2) $x^2-11x+24\leq 0$

Les racines sont : $x_1=3$ et $x_2=8$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		8		$+\infty$
$x^2-11x+24$		+	0	−	0	+	

D'où : $S=[3;8]$

3) a) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=38 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=38 \end{cases}$ Équivaut à : $(2)+(1)$ $x-y+x+y=6+38$

Équivaut à : $2x=44$ Équivaut à : $x=22$ et on remplace dans : $x+y=38$

Équivaut à : $22+y=38$ C'est à dire : $y=38-22=16$

Donc : $S=\{(22,16)\}$

b) soient : x le nombre d'amis invités par Ahmed et y le nombre d'amis invités par Maryam

Puisqu'il le nombre d'amis invités par Maryam était de 6 de moins que ceux invités par Ahmed alors : $x-y=6\ (1)$

Puisque le nombre total d'amis invités était de 38. Alors : $x+y=38\ (2)$

Il suffit de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x-y=6 \ (1) \\ x+y=38 \ (2) \end{cases}$

On a trouvé que : $\begin{cases} x=22 \\ y=16 \end{cases}$

Donc : le nombre d'amis invités par Ahmed est : 22
Le nombre d'amis invités par Maryam est : 16

Exercice3 :

1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=11$ et sa raison $r=4$

Donc : $u_n=u_0+nr=11+4n$

$u_n=11+4n$ Donc : $u_{50}=11+4\times 50=11+200=211$

2) On a : $u_n=2015$ donc : $11+4n=2015$

Donc : $4n=2015-11$

Donc : $n=\frac{2004}{4}=501$

3) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{50}=(50-0+1)\frac{u_0+u_{50}}{2}$

$S=51\frac{11+211}{2}=51\frac{222}{2}=51\times 111=5661$

Exercice4 : 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x-1}$ On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} x-2=1-2=-1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0^+$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=-\infty$

2) a) Calcul de : $g'(x)$

$g'(x)=(x^3+2x)'=3x^{3-1}+2$

$g'(x)=3x^2+2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) Calcul de : $h'(x)=\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$h'(x)=\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'=\frac{(x-2)'(x-1)-(x-2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)-1\times(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

Donc : $h'(x)=\frac{1}{(x-1)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Exercice5 : 1) On a : $f(x)=4x^2-4x-3$ donc : $f(0)=4\times0^2-4\times0-3=0-0-3=-3$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{1}{2}\right)-3=4\times\frac{1}{4}-\frac{4}{2}-3=1-2-3=-4$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 4x^2-4x-3=\lim_{x\to+\infty} 4x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 4x^2-4x-3=\lim_{x\to-\infty} 4x^2=+\infty$

2)a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(4x^2-4x-3\right)'=4\times2x-4+0=8x-4=4(2x-1)$

4) $f'(x)=0\Leftrightarrow 4(2x-1)=0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Le tableau de signe est le suivant : $f'(x)=8x-4$ $a=8\succ0$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$8x+4$	$-$	0	$+$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-4$

3) Déterminons les points d'intersections de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses
Sont les solutions de l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0$

Calculons le discriminant de l'équation $4x^2-4x-3=0$: a = 4, b= -4 et c = -3
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16+48=64$
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1=\frac{4+\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{4+8}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{4-\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{4-8}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses sont :
$A\left(\frac{-1}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{3}{2};0\right)$

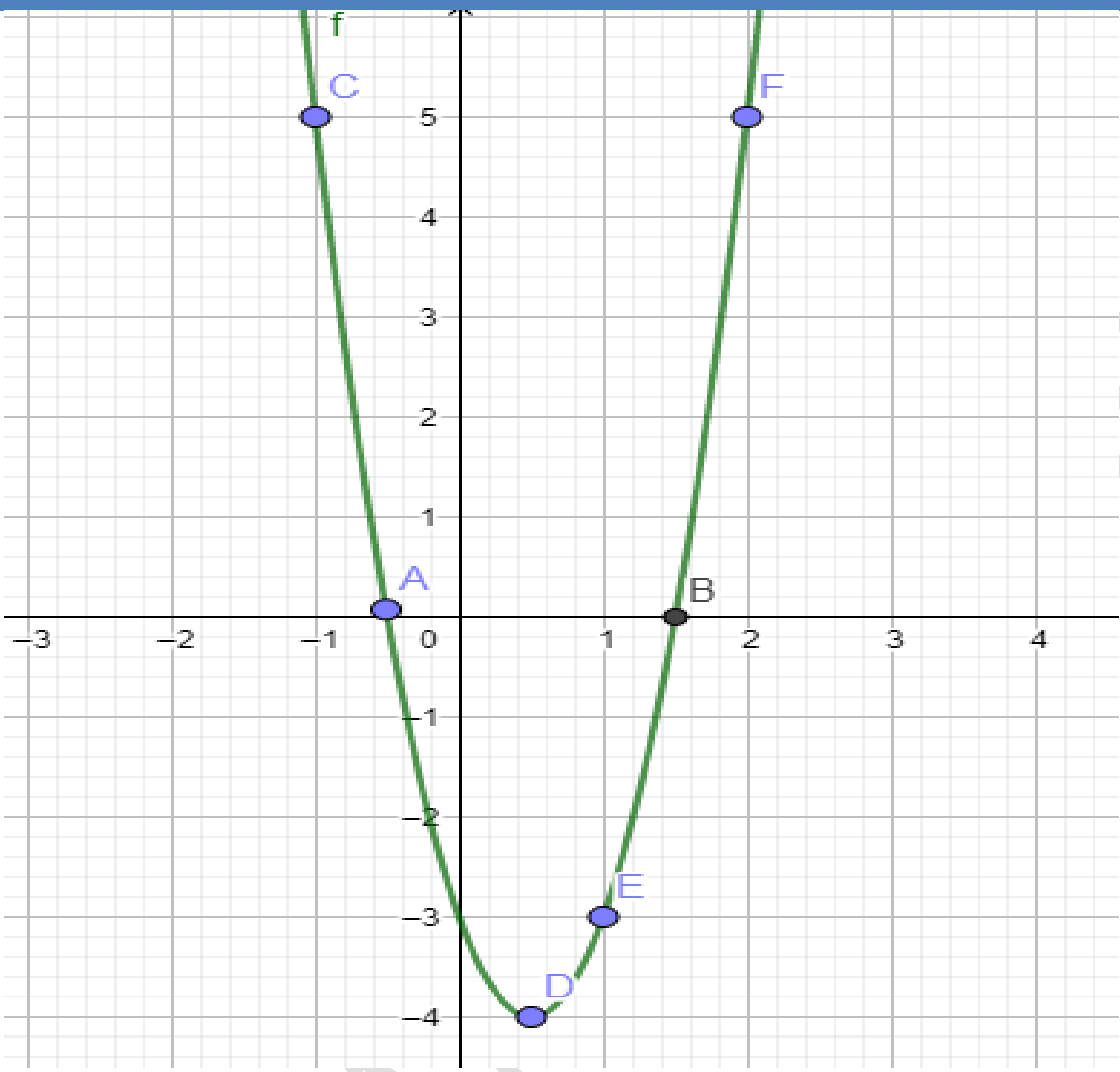
4) La courbe (C_f). :
Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1/2	1	2
f(x)	5	-1	-4	-3	5

$f(-1)=4\times(-1)^2-4\times(-1)-3=4+4-3=5$

$f(2)=4\times2^2-4\times2-3=16-8-3=5$

$f(1)=4\times1^2-4\times1-3=4-4-3=-3$


f
C
F
A
B
D
E
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4