Polynôme du second degré

1. Rappels d'algèbres :

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

a. $(2x+1)(x+1)$ b. $3\cdot(1+x)-2\cdot(x+3)$

c. $(2x+1)^2$ d. $(5x+2)(x+2)+2(1+x)$

Exercice 2

Pour chacune des équations ci-dessous, vérifier si le nombre 2 en est une solution :

a. $2x+5=5x-1$ b. $2(x+3)+1=15$

c. $2(1-x)^2-4=4-4x$ d. $x^2-4x+1=-3$

Exercice 3

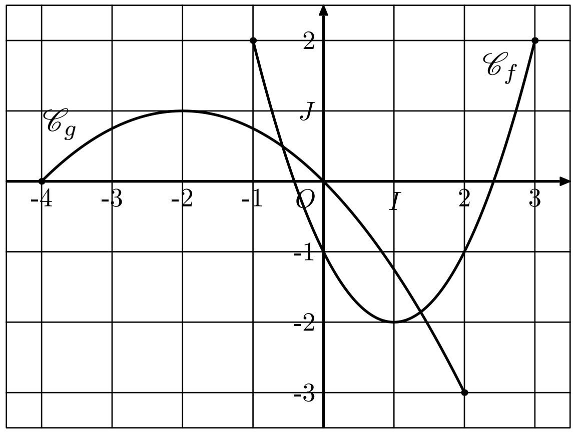
Résoudre les équations ci-dessous :

a. $2x+3=6$ b. $5x+1=2x+7$

c. $3x-4=7x+4$ d. $(x+1)^2=9$

Exercice 4

On considère deux fonctions f et g représentées ci-dessous dans un repère $(O\,;I\,;J)$ respectivement par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$



Ci-dessous sont proposés deux tableaux de variations.

x	... ...
Variation de ...	... ↗ ... ↘ ...

x	... ...
Variation de ...	... ↘ ... ↗ ...

Compléter les pointillés dans chacun de ses tableaux de variations.

2. Ecriture d'un polynôme du second degré :

Exercice 5

Ecrire chacune des polynômes ci-dessous sous la forme : $a\cdot x^2+b\cdot x+c$

a. $3\cdot x^2+5-2\cdot x$ b. $5-x+3\cdot x^2$

c. $2\cdot x+1-x^2+3\cdot x$ d. $3\cdot x^2-1+x+3$

e. $2\cdot(x^2+x)+3\cdot(3-x)$ f. $(x+1)(2-x)$

Exercice 6

1. Développer les expressions suivantes :

   a. $(x-3)(x-1)$ b. $(x-2)^2-1$

2. Développer les expressions suivantes :

   a. $2\cdot(x+2)(x+4)$ b. $2\cdot(x+3)^2-2$

3. Développer les expressions suivantes :

   a. $-(x-5)(x-1)$ b. $4-(x-3)^2$

3. Forme canonique :

Exercice 7

Pour tout polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ du second degré, il existe deux nombres réels α et β tels que :

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x+\alpha)^2+\beta$$

Cette expression s'appelle **forme canonique** de ce polynôme.

1. a. Montrer que $(x-3)^2-4$ est la forme canonique du polynôme $x^2-6\cdot x+5$

   b. Montrer que $(x+1)^2-4$ est la forme canonique du polynôme $x^2+2\cdot x-3$

   c. Montrer que $(x-3)^2-25$ est la forme canonique du polynôme $x^2-6\cdot x-16$

Soit $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ un polynôme du second degré. On appelle racine de ce polynôme nombre x dont l'évalution par le polynôme vaut 0 :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = 0$$

Pour déterminer les racines d'un polynôme, on se sert de sa forme canonique. Prenons pour exemple, l'expression de la question a. :

$$x^2 - 6{\cdot}x + 5 = 0$$
$$\left(x-3\right)^2 - 4 = 0$$
$$\left(x-3\right)^2 = 4$$
$$\left(x-3\right)^2 = 2^2$$

On utilise la propriété suivante : "*Deux nombres dont les carrés sont égaux sont soit égaux, soit opposés*".
On en déduit les deux équations :

$x - 3 = 2$	$x - 3 = -2$
$x = 2 + 3$	$x = -2 + 3$
$x = 5$	$x = 1$

Ainsi, le polynôme $x^2{-}6{\cdot}x{+}5$ admet les deux racines 1 et 5.

2. En utilisant la même méthode,

b. Montrer que le polynôme $x^2{+}2{\cdot}x{-}3$ admet pour racine -3 et 1.

c. Montrer que le polynôme $x^2{-}6{\cdot}x{-}16$ admet pour racine -2 et 8.

4. Discriminant :

Exercice 8

Le **discriminant** d'un polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme :

$$\Delta = b^2 - 4{\times}a{\times}c$$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta{=}b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c$
$x^2{+}x{+}1$				
$-0{,}5{\cdot}x^2{+}2{\cdot}x{+}1$				
$x^2{+}4$				
$2{\cdot}x^2{-}3{\cdot}x{-}1$				

Exercice 9

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta{=}b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c$
$2{\cdot}x^2{+}5{\cdot}x{+}1$				
$-x^2{+}7{\cdot}x{+}3$				
$x^2{-}5{\cdot}x{+}4$				
$2{\cdot}x^2{-}4{\cdot}x{-}1$				
$-x^2{-}x{-}1$				
$x^2{+}7$				

Exercice 10

Déterminer le discrimant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. $x^2 + 2x + 4$ b. $2x^2 + 4x + 1$ c. $x^2 - 2x + 1$

d. $-2x^2 + 2x + 1$ e. $x^2 - x - 1$ f. $3x^2 + x - 2$

5. Equation du second degré :

Exercice 11

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.
Pour un polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta{<}0$	$\Delta{=}0$	$\Delta{>}0$

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2+2x-35=0$ b. $2x^2+8x+6=0$

c. $5x^2-3x+2=0$ d. $9x^2-24x+16=0$

e. $-2x^2+3x-5=0$ f. $3x^2+12x+9=0$

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+9x+6=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

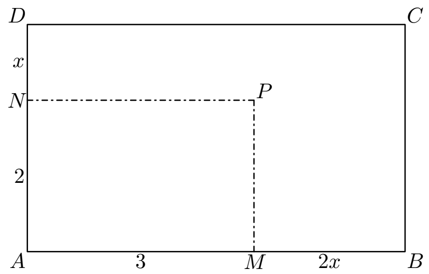
c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $x^2+12x+27=0$ f. $2x^2+12x+10$

Exercice 13

On note x une mesure indéterminée. On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous où :

$AM=3$; $MB=2x$; $AN=2$; $ND=x$



1. Dans le cas particulier où $x=2$, déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ a mesure 28.

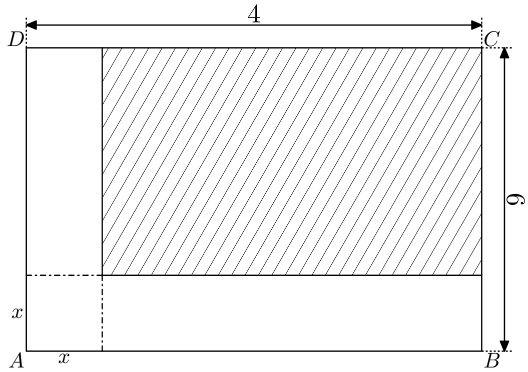
2. On se place dans le cas général où x représente un nombre indéterminé :

   a. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ a pour valeur :
   $\mathcal{A}=2\cdot x^2+7\cdot x+6$

   b. Déterminer la ou les valeurs de x afin que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ a pour valeur 36.

Exercice 14

On note x une mesure indéterminée et on considère le rectangle $ABCD$ de dimensions 6 et 4 représenté ci-dessous :



où un rectangle, domaine représenté rayé, obtenue en réduisant les dimensions de $ABCD$ de x.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle représenté rayé.

1. Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime par :
   $\mathcal{A}=x^2-10\cdot x+24$

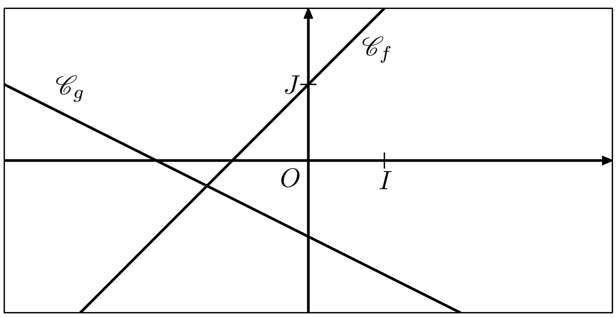
2. Déterminer la valeur de x afin que $\mathcal{A}$ ait pour valeur 8.

6. Rappels sur les tableaux de signes :

Exercice 15

on considère les deux fonctions f et g définies par :
$f(x)=x+1$; $g(x)=-0{,}5\cdot x-1$

Dans le repère $(O;I;J)$ donné ci-dessous, sont représentés les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.



Sans justification, compléter les tableaux de signes des fonctions f et g :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	

Exercice 16

Compléter le tableau de signes de chacunes des expressions E :

1.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$			0	
$3+x$		0		
$E=(2x+1)(3+x)$		0	0	

2.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$x-2$				
$4x-3$				
$E=(x-2)(4x-3)$				

3.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2+x$	
$2-x$	
$E=(2+x)(2-x)$	

7. Tableau de signes :

Exercice 17

Le tableau de signes d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.
Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$ (α et β sont les deux racines)
$a>0$	x : $-\infty$ $\quad$ $+\infty$; Signe : $+$	x : $-\infty$ $\quad$ $-b/2a$ $\quad$ $+\infty$; Signe : $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$	x : $-\infty$ $\quad$ α $\quad$ β $\quad$ $+\infty$; Signe : $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$a<0$	x : $-\infty$ $\quad$ $+\infty$; Signe : $-$	x : $-\infty$ $\quad$ $-b/2a$ $\quad$ $+\infty$; Signe : $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$	x : $-\infty$ $\quad$ α $\quad$ β $\quad$ $+\infty$; Signe : $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

a. x^2+x-6 $\qquad$ b. $2\cdot x^2-3\cdot x+1$

c. $3x^2+3x-6$ $\qquad$ d. $-x^2+x+2$

e. $-2x^2+12x-18$ $\qquad$ f. $3x^2-5x-2$

8. Inéquations :

Exercice 18

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2-3x+2>0$ $\qquad$ b. $x^2-x-2<0$

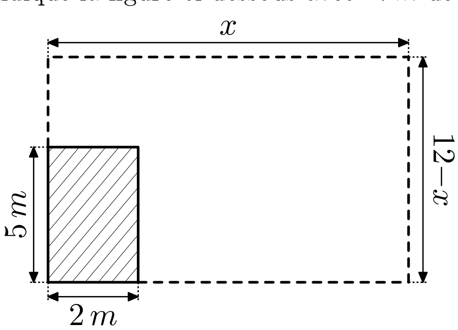
c. $-9x^2+12x-4\leqslant 0$ $\qquad$ d. $5x^2+4x-1<0$

e. $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ $\qquad$ f. $-x^2+x-3>0$

9. Problèmes :

Exercice 19

Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos *(représenté en pointillée)* comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

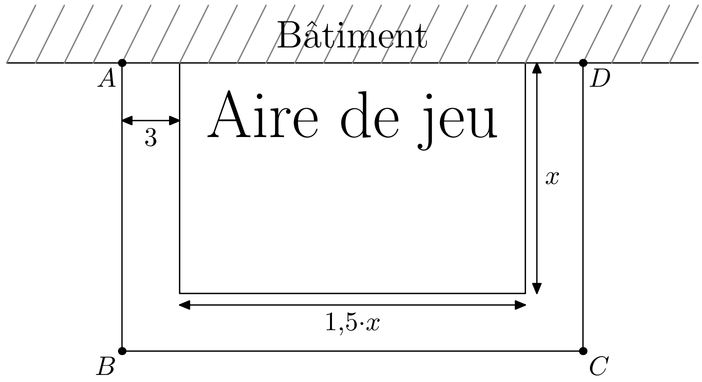
On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x)=-x^2+12\cdot x-10$

2. Pour quelles valeurs de x, l'espace extérieure a une aire de $25\,m^2$.

Exercice 20

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



1. Exprimer l'aire totale du terrain *(en incluant les allées)*.

2. Pour quelle valeur de x, l'aire $\mathcal{A}$ mesure $84\,m^2$.