Serie d'exercices sur les applications
Injection, surjection, bijection

Exercice 1

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-1$. A-t-on $f\circ g=g\circ f$?

Exercice 2

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ telle que

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démontrer que $f\circ f=id$.

Exercice 3

Soit $f:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ telle que $f(x)=x^2-1$. f est-elle bijective ?

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto n+1$
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, n\mapsto n+1$
3. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$
4. $k:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$

Exercice 5

On considère quatre ensembles A,B,C et D et des applications $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Montrer que :

$$g\circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g\circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives }\big)\Leftrightarrow\big(f,g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice6

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g:[-1,1]\to[-1,1]$ $g(x)=f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Correction de la serie d'exercices

Correction de l'exercice 1

Si $f \circ g = g \circ f$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$.

Correction de l'exercice 2

Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1 - x$ donc $f \circ f(x) = f(1-x)$, mais $1 - x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f \circ f(x) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f \circ f(x) = x$. Et donc $f \circ f = id$.

Correction de l'exercice 3

- f est injective : soient $x, y \in [1, +\infty[$ tels que $f(x) = f(y)$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ or } x, y \in [1, +\infty[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Correction de l'exercice 4

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$ (si ce n existait ce serait $n = -1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$). Par contre f est injective : soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$ alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$. Bilan f est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que g est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que g est à la fois injective et surjective. En effet soient $n, n' \in \mathbb{Z}$ tels que $g(n) = g(n')$ alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$, alors g est injective. Et g est surjective car chaque $m \in \mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n) = m$. Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction $g' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g'(m) = m - 1$ alors $g' \circ g(n) = n$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$) et $g \circ g'(m) = m$ (pour tout $m \in \mathbb{Z}$). Alors g' est la bijection réciproque de g et donc g est bijective.
3. Montrons que h est injective. Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x,y) = h(x',y')$. Alors $(x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')$ donc

$$\begin{cases} x + y &= x' + y' \\ x - y &= x' - y' \end{cases}$$

En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x = 2x'$ donc $x = x'$ et avec la différence on obtient $y = y'$. Donc les couples (x,y) et (x',y') sont égaux. Donc h est injective.

Montrons que h est surjective. Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x,y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x,y) = (X,Y)$, donc $(x+y, x-y) = (X,Y)$ ou encore :

$$\begin{cases} x + y &= X \\ x - y &= Y \end{cases}$$

Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x = \frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y = \frac{X-Y}{2}$, donc $(x,y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple (x,y) que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour !). Bilan pour (X,Y) donné, son antécédent par h existe et est $(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Donc h est surjective.

En fait on pourrait montrer directement que h est bijective en exhibant sa bijection réciproque $(X,Y) \mapsto (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.

4. Montrons d'abord que k est injective : soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $k(x) = k(x')$ alors $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$ donc $(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1)$. En développant nous obtenons $xx' + x' - x = xx' - x' + x$, soit $2x = 2x'$ donc $x = x'$.

   Au brouillon essayons de montrer que k est surjective : soit $y \in \mathbb{R}$ et cherchons $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $f(x) = y$. Si un tel x existe alors il vérifie $\frac{x+1}{x-1} = y$ donc $x+1 = y(x-1)$, autrement dit $x(y-1) = y+1$. Si l'on veut exprimer x en fonction de y cela se fait par la formule $x = \frac{y+1}{y-1}$. Mais attention, il y a un piège ! Pour $y = 1$ on ne peut pas trouver d'antécédent x (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc k n'est pas surjective car $y = 1$ n'a pas d'antécédent.

   Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction $k_| : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est définie aussi par $k_|(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (seul l'espace d'arrivée change par rapport à k) alors cette fonction $k_|$ est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

Correction de l'exercice 5

---

1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soient a, $a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

   c'est la définition de f injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.

3. Un sens est simple $(\Leftarrow)$ si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.

   Pour l'implication directe $(\Rightarrow)$: si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2. g est surjective.

   Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.

   Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction de l'exercice 6

1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1+x^2)$ soit

2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.

3. Soit $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Pour $y = 0$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 0$. Donc pour $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ si $y \neq 0$ et $h(0) = 0$. Donc g est une bijection.

4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1,1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1,1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f, appelée $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, est une bijection.