

## Injection, surjection, bijection

---

### Exercice 1

---

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) = 3x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 1$ . A-t-on  $f \circ g = g \circ f$  ?

### Exercice 2

---

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que  $f \circ f = id$ .

### Exercice 3

---

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $f(x) = x^2 - 1$ .  $f$  est-elle bijective ?

### Exercice 4

---

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
2.  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$
3.  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
4.  $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

### Exercice 5

On considère quatre ensembles  $A, B, C$  et  $D$  et des applications  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ . Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

### Exercice 6

---

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x/(1+x^2)$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ .
3. Montrer que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], g(x) = f(x)$  est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de  $f$ .

### Correction de l'exercice 1

---

Si  $f \circ g = g \circ f$  alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons  $x = 0$ . Alors  $f \circ g(0) = f(-1) = -2$ , et  $g \circ f(0) = g(1) = 0$  donc  $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$ . Ainsi  $f \circ g \neq g \circ f$ .

---

### Correction de l'exercice 2

---

Soit  $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  alors  $f(x) = x$  donc  $f \circ f(x) = f(x) = x$ . Soit  $x \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  alors  $f(x) = 1 - x$  donc  $f \circ f(x) = f(1 - x)$ , mais  $1 - x \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  (vérifiez-le!) donc  $f \circ f(x) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$ . Donc pour tout  $x \in [0, 1]$  on a  $f \circ f(x) = x$ . Et donc  $f \circ f = id$ .

---

### Correction de l'exercice 3

---

- $f$  est injective : soient  $x, y \in [1, +\infty[$  tels que  $f(x) = f(y)$  :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ or } x, y \in [1, +\infty[ \text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- $f$  est surjective : soit  $y \in [0, +\infty[$ . Nous cherchons un élément  $x \in [1, +\infty[$  tel que  $y = f(x) = x^2 - 1$ . Le réel  $x = \sqrt{y+1}$  convient !
- 

### Correction de l'exercice 4

---

1.  $f$  n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f(n) = 0$  (si ce  $n$  existait ce serait  $n = -1$  qui n'est pas un élément de  $\mathbb{N}$ ). Par contre  $f$  est injective : soient  $n, n' \in \mathbb{N}$  tels que  $f(n) = f(n')$  alors  $n + 1 = n' + 1$  donc  $n = n'$ . Bilan  $f$  est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que  $g$  est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que  $g$  est à la fois injective et surjective. En effet soient  $n, n' \in \mathbb{Z}$  tels que  $g(n) = g(n')$  alors  $n + 1 = n' + 1$  donc  $n = n'$ , alors  $g$  est injective. Et  $g$  est surjective car chaque  $m \in \mathbb{Z}$  admet un antécédent par  $g$  : en posant  $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$  on trouve bien  $g(n) = m$ . Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction  $g' : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $g'(m) = m - 1$  alors  $g' \circ g(n) = n$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ) et  $g \circ g'(m) = m$  (pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ). Alors  $g'$  est la bijection réciproque de  $g$  et donc  $g$  est bijective.
3. Montrons que  $h$  est injective. Soient  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $h(x, y) = h(x', y')$ . Alors  $(x + y, x - y) = (x' + y', x' - y')$  donc

$$\begin{cases} x + y &= x' + y' \\ x - y &= x' - y' \end{cases}$$

En faisant la somme des lignes de ce système on trouve  $2x = 2x'$  donc  $x = x'$  et avec la différence on obtient  $y = y'$ . Donc les couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont égaux. Donc  $h$  est injective.

Montrons que  $h$  est surjective. Soit  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ , cherchons lui un antécédent  $(x, y)$  par  $h$ . Un tel antécédent vérifie  $h(x, y) = (X, Y)$ , donc  $(x + y, x - y) = (X, Y)$  ou encore :

$$\begin{cases} x + y &= X \\ x - y &= Y \end{cases}$$

Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient  $x = \frac{X+Y}{2}$  et avec la différence  $y = \frac{X-Y}{2}$ , donc  $(x, y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$ . La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple  $(x, y)$  que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour!). Bilan pour  $(X, Y)$  donné, son antécédent par  $h$  existe et est  $(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$ . Donc  $h$  est surjective.

En fait on pourrait montrer directement que  $h$  est bijective en exhibant sa bijection réciproque  $(X, Y) \mapsto (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$ . Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.

4. Montrons d'abord que  $k$  est injective : soient  $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tels que  $k(x) = k(x')$  alors  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$  donc  $(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1)$ . En développant nous obtenons  $xx' + x' - x = xx' - x' + x$ , soit  $2x = 2x'$  donc  $x = x'$ .

Au brouillon essayons de montrer que  $k$  est surjective : soit  $y \in \mathbb{R}$  et cherchons  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tel que  $f(x) = y$ . Si un tel  $x$  existe alors il vérifie  $\frac{x+1}{x-1} = y$  donc  $x+1 = y(x-1)$ , autrement dit  $x(y-1) = y+1$ . Si l'on veut exprimer  $x$  en fonction de  $y$  cela se fait par la formule  $x = \frac{y+1}{y-1}$ . Mais attention, il y a un piège ! Pour  $y = 1$  on ne peut pas trouver d'antécédent  $x$  (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc  $k$  n'est pas surjective car  $y = 1$  n'a pas d'antécédent.

Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction  $k|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$  qui est définie aussi par  $k|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}(x) = \frac{x+1}{x-1}$  (seul l'espace d'arrivée change par rapport à  $k$ ) alors cette fonction  $k|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$  est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

### Correction de l'exercice 5

1. Supposons  $g \circ f$  injective, et montrons que  $f$  est injective : soient  $a, a' \in A$  avec  $f(a) = f(a')$  donc  $g \circ f(a) = g \circ f(a')$  or  $g \circ f$  est injective donc  $a = a'$ . Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

c'est la définition de  $f$  injective.

2. Supposons  $g \circ f$  surjective, et montrons que  $g$  est surjective : soit  $c \in C$  comme  $g \circ f$  est surjective il existe  $a \in A$  tel que  $g \circ f(a) = c$  ; posons  $b = f(a)$ , alors  $g(b) = c$ , ce raisonnement est valide quelque soit  $c \in C$  donc  $g$  est surjective.
3. Un sens est simple ( $\Leftarrow$ ) si  $f$  et  $g$  sont bijectives alors  $g \circ f$  l'est également. De même avec  $h \circ g$ .  
Pour l'implication directe ( $\Rightarrow$ ) : si  $g \circ f$  est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2.  $g$  est surjective.

Si  $h \circ g$  est bijective, elle est en particulier injective, donc  $g$  est injective (c'est le 1.). Par conséquent  $g$  est à la fois injective et surjective donc bijective.

Pour finir  $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$  est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour  $h$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

---

1.  $f$  n'est pas injective car  $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$ .  $f$  n'est pas surjective car  $y = 2$  n'a pas d'antécédent : en effet l'équation  $f(x) = 2$  devient  $2x = 2(1+x^2)$  soit
  2.  $f(x) = y$  est équivalent à l'équation  $yx^2 - 2x + y = 0$ . Cette équation a des solutions  $x$  si et seulement si  $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$  donc il y a des solutions si et seulement si  $y \in [-1, 1]$ . Nous venons de montrer que  $f(\mathbb{R})$  est exactement  $[-1, 1]$ .
  3. Soit  $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  alors les solutions  $x$  possibles de l'équation  $g(x) = y$  sont  $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$  ou  $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ . La seule solution  $x \in [-1, 1]$  est  $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$  en effet  $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$ . Pour  $y = 0$ , la seule solution de l'équation  $g(x) = 0$  est  $x = 0$ . Donc pour  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  nous avons trouvé un inverse  $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  défini par  $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$  si  $y \neq 0$  et  $h(0) = 0$ . Donc  $g$  est une bijection.
  4.  $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$ , donc  $f'$  est strictement positive sur  $] -1, 1[$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[-1, 1]$  avec  $f(-1) = -1$  et  $f(1) = 1$ . Donc la restriction de  $f$ , appelée  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , est une bijection.
-