

Série produit scalaire dans le plan

Exercice n°1 :

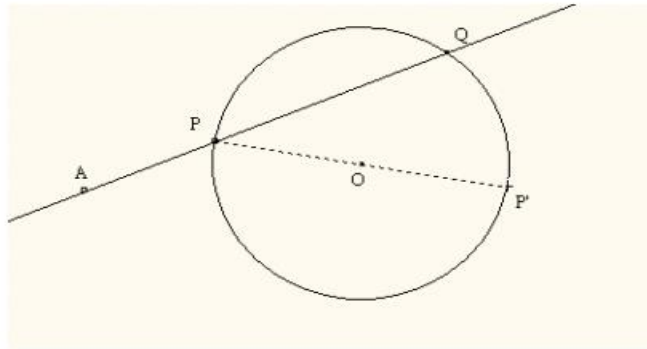
ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants : $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$; $\overline{CA} \cdot \overline{CI}$; $(\overline{AB} - \overline{AC}) \cdot \overline{AI}$.

Exercice n°2 :

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4$.
Ce triangle est-il rectangle ? (si oui préciser en quel sommet).

Exercice n°3 :

C est un cercle de centre O et de rayon R et A est un point fixé du plan.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite (d) passant par A , coupant le cercle C en deux points P et Q , le produit scalaire $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P . Montrer que $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}$.
2. Montrer que $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = AO^2 - R^2$.
3. Conclure.

Exercice n°4 :

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.
2. Calculer en développant $\|\overline{AD} - \overline{AB}\|^2$.
3. En déduire BD .

Exercice n°5 :

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et largeur ℓ . Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC) .

1. Montrer que $\overline{CA} \cdot \overline{BD} = L^2 - \ell^2$ (on pourra décomposer les vecteurs suivant des directions orthogonales). En déduire HK en fonction de L et ℓ .
2. Comment choisir L et ℓ pour avoir $AC = 2HK$.

Exercice n°6 :

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne $A(-2; 2)$ et $B(2; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = 4$.
4. Déterminer une équation du cercle (C) .
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(\sqrt{7}, \lambda)$ soit sur (C) ?
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en Z .

Exercice n°7 :

L'unité de longueur est le centimètre.

O et A sont deux points tels que $OA = 2$.

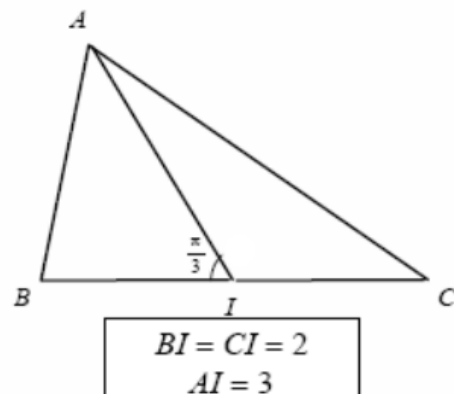
- 1) Déterminer et placer sur une figure le point H de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = 10$
- 2) Déterminer et représenter sur la figure précédente l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 10$.
(E est la ligne de niveau 10 de la fonction $M \rightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$)

Exercice n°8 :

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.
(voir les données sous la figure)

Calculer :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $AB^2 + AC^2$
3. $AB^2 - AC^2$
4. AB et AC .



Exercice n°9 :

Dans un plan P on donne un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2BC = 4$.

On note $O = A * B$. $J \in [CD]$ tel que $CJ = 1$ et I le point d'intersection des deux droites (AC) et (BJ) .

- 1- a) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CJ}$. En déduire que $(AC) \perp (BJ)$.
b) Calculer BJ puis la distance du point B à la droite (AC) .
- 2- Soit $F = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 24\}$. Déterminer et construire l'ensemble F .
- 3- On note H le point du plan défini par $BH = 2\sqrt{3}$ et $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{6}$ et E le point tel que $\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HE} = \vec{0}$.
b) Calculer AH et en déduire la nature du triangle ABH .
c) Soit $F' = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + 2ME^2 = 30\}$. Vérifier que $A \in F'$ puis déterminer et construire l'ensemble F' .

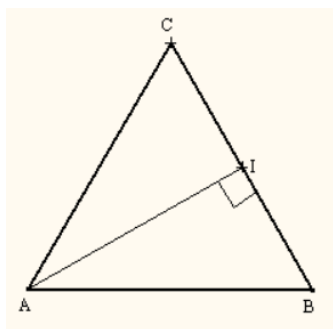
Exercice n°10 :

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 2\sqrt{19}$.

1. a) Démontrer que $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ rd. Construire le triangle ABC.
b) Calculer la distance CI où $I = A * B$.
2. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :
 - a) $E = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 92\}$.
 - b) $F = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = -60\}$, (vérifier que $C \in F$).
 - c) $\Gamma = \{M \in P / MB^2 - 4MA^2 = 12\}$.

Solutions des exercices

Solutions de l'exercice1 :



$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = BA \times BC \times \cos \hat{ABC} = 5 \times 5 \times \cos 60^\circ = \frac{25}{2}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CI} = CA \times CI \times \cos \hat{ACI} = 5 \times \frac{5}{2} \times \cos 60^\circ = \frac{25}{4}$$

$$(\overline{AB} - \overline{AC}) \cdot \overline{AI} = (\overline{AB} + \overline{CA}) \cdot \overline{AI} = \overline{CB} \cdot \overline{AI} = 0$$

Exercice n°2 :

$AB = 2$ et $AC = 3$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4$.

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BA} \cdot (\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{BA} \cdot \overline{BA} + \overline{BA} \cdot \overline{AC} = BA^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 - 4 = 0$$

\Rightarrow ABC est un triangle rectangle en B.

Autrement :

$$BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC} = BA^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 + 9 - 8 = 5$$

$BC^2 + BA^2 = AC^2 \Rightarrow$ BAC est un triangle rectangle en B.

Exercice n°3 :

- $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$, car Q est le projeté orthogonal de P' sur la droite (AP).
- $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = (\overline{AO} + \overline{OP}) \cdot (\overline{AO} + \overline{OP'}) = AO^2 + \overline{AO} \cdot \underbrace{(\overline{OP} + \overline{OP'})}_0 + \overline{OP} \cdot \underbrace{\overline{OP'}}_{-\overline{OP}} = AO^2 - OP^2 = AO^2 - R^2$
- $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'} = AO^2 - R^2$ c'est une constante puisque A est fixe.

Exercice n°7 :

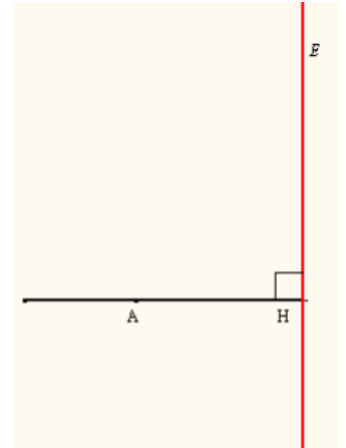
- H ∈ (OA) tel que : $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = 10$

$$H \in (OA) \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overline{OA} \text{ et } \overline{OH} \text{ sont de même sens} \\ \text{ou} \\ -OA \times OH \text{ si } \overline{OA} \text{ et } \overline{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = 10 > 0 \Rightarrow \overline{OA} \text{ et } \overline{OH} \text{ sont de même sens et } OA \times OH = 10 \Rightarrow OH = 5$$

- $\overline{OA} \cdot \overline{OM} = 10 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OM} = \overline{OA} \cdot \overline{OH} \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \left(\underbrace{\overline{OM} - \overline{OH}}_{\overline{HM}} \right) = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{HM} = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \perp \overline{HM}$

E est la droite perpendiculaire à (OA) en H.



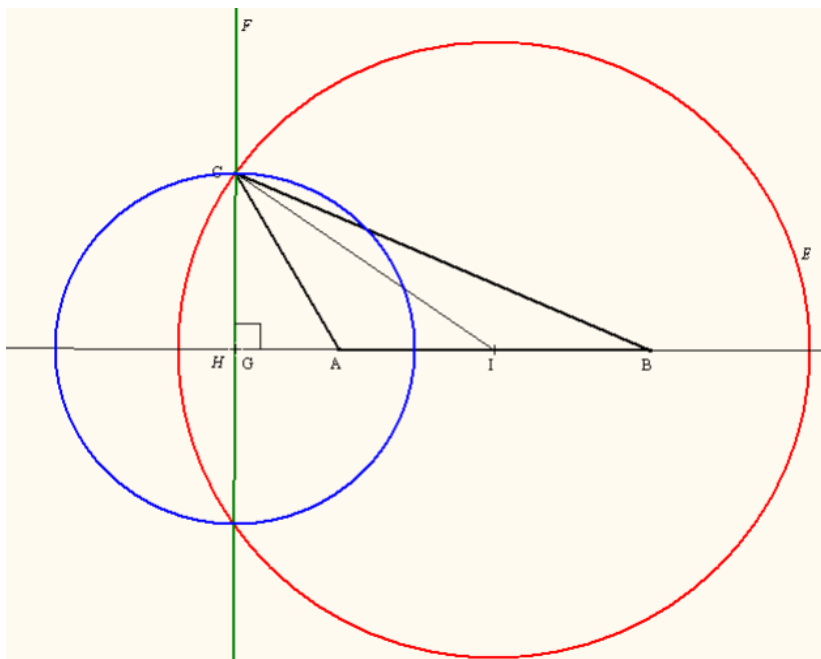
Exercice n°10 :

$$AB = 6, AC = 4 \text{ et } BC = 2\sqrt{19}.$$

- a) D'après la formule d'El Kashy, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{BAC} \Rightarrow \cos \hat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{36 + 16 - 76}{48} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \text{ rd}$$



b) D'après la formule de la médiane, on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow CI^2 = \frac{CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}}{2} = \frac{16 + 76 - 18}{2} = 37 \Rightarrow CI = \sqrt{37}$$

2. a) $E = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 92\}$

$$M \in E \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 92 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 92 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{92 - 18}{2} = 37 \Leftrightarrow IM = \sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta(I, \sqrt{37})$$

Ainsi E est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{37}$ (puisque $IC = \sqrt{37} \Rightarrow C \in E$).

b) $F = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = -60\}$

$$CA^2 - CB^2 = -60 \Rightarrow C \in F.$$

$$M \in F \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = -60 \Leftrightarrow 2\overline{IM} \cdot \overline{AB} = -60 \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = -30$$

Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overline{IH} \cdot \overline{AB} = -30$

F est la droite perpendiculaire à (AB) en H, ou F est la perpendiculaire à (AB) passant par C.

c) $\Gamma = \{M \in P / MB^2 - 4MA^2 = 12\}$

Soit G le barycentre des points pondérés (B, 1) et (A, -4)

$$\overline{GB} - 4\overline{GA} = \vec{0}$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MB^2 - 4MA^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MG} + \overline{GB})^2 - 4(\overline{MG} + \overline{GA})^2 = 12 \Leftrightarrow -3MG^2 + 2\overline{MG} \cdot \underbrace{(\overline{GB} - 4\overline{GA})}_{\vec{0}} + GB^2 - 4GA^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow -3MG^2 + GB^2 - 4GA^2 = 12$$

$$\text{Or } \overline{BG} = \frac{4}{3}\overline{BA} \Rightarrow BG = \frac{4}{3} \times 6 = 8 \text{ et } \overline{AG} = -\frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow AG = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow -3MG^2 + 64 - 16 = 12 \Leftrightarrow 3MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 12 \Leftrightarrow GM = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta(G, 2\sqrt{3})$$

Remarque : $C \in \Gamma$ car $CB^2 - 4CA^2 = 12 \Rightarrow \Gamma$ est le cercle de centre G et passant par C