1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF

Exercices de mathématiques sur les suites géométriques avec Correction

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice1 : Compléter les suites de nombres suivantes :
1 ; 2 ; 4 ; 8 ; … ; ; ;
1 ; 3 ; 9 ; 27 ; … ; …
$1,\ \frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{-1}{8}$,; … ;…. ;…

Solution :
1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16; 32;64 ;128
1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243
$1,\ \frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{-1}{8};\ \frac{1}{16};-\frac{1}{32};\frac{1}{64}$

Exercice2 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$

1) Calculer u_1 et u_2 et u_3

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

Solution :1) On a : $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$
Pour n=0 on a :$u_{0+1} = 2u_0$ par suite : $u_1 = 2\times 3 = 6$
Pour n=1 on a :$u_{1+1} = 2u_1$ par suite :$u_2 = 2\times 6 = 12$
Pour n=2 on a :$u_{2+1} = 2u_2$ par suite :$u_3 = 2\times 12 = 24$

2) On a : $u_{n+1} = 2u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$

Exercice3: Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer v_0 et v_1 et v_2

2) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

Solution :1) On a : $v_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Pour n=0 : on a :$v_0 = 2\times 3^0$ par suite : $v_0 = 2$
Pour n=1 : on a :$v_1 = 2\times 3^1$ par suite : $v_1 = 6$
Pour n=2 : on a :$v_2 = 2\times 3^2$ par suite : $v_2 = 18$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n} = 3 = q$

Donc la suite est géométrique de raison $q = 3$ et son premier terme : $v_0 = 2$

Exercice4 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_4 = \frac{3}{16}$

1) Déterminer sa raison q

2) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = q^{n-p} u_p$

Pour n= 4 et p=1 on a : $u_4 = q^{4-1} u_1$

Donc : $\frac{3}{16} = q^3 \frac{3}{2} \Leftrightarrow q^3 = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow q^3 = \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

2) u_n en fonction de n ?

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times u_1 \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice5 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme : $u_0 = 3$ et sa raison $q = 2$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_2 et u_5

3) Calculer : $S_1 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$ **et** $S_2 = u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 \times q^{n-0} = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

Donc : $u_n = 3 \times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 3 \times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$ et $u_5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$

3) a) Calcul de : $S_1 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5 - 0 + 1 = 6$

Donc : $S_1 = u_0 \frac{1-2^6}{1-2} = 3\frac{1-64}{-1} = 3 \times \frac{-63}{-1} = 3 \times 63 = 189$

3) b) Calcul de : $S_2 = u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5 - 2 + 1 = 4$

Donc : $S_2 = u_2 \frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$

Donc : $S_2 = u_2 \frac{1-16}{1-2} = 12\frac{1-2^4}{-1} = 12 \times \frac{-15}{-1} = 12 \times 15 = 180$

Exercice6 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme : $u_0 = 3$ et sa raison $q = 2$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Ecrire u_n en fonction de n
3) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$ On donne : $2^{10} = 59049$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$

$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$

2) On a : $u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $u_n = 3 \times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 9 - 0 + 1 = 10$

Donc : $S = u_0 \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3\dfrac{1 - 59049}{-1} = 3 \times \dfrac{-59048}{-1} = 3 \times 59048 = 295240$

Exercice7 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$
2) Ecrire u_n en fonction de n et Vérifier que : $u_9 = 1024$
3) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(u_n)_n$

Donc : $u_1 = qu_0$

Donc : $4 = q \times 2$

Donc : $q = \dfrac{4}{2} = 2$

2) u_n en fonction de n ?

Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = 2 \times 2^n = 2^1 \times 2^n = 2^{n+1}$: Donc $u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $\boxed{u_n = 2^{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Alors : $u_9 = 2^{9+1} = 2^{10} = 1024$

3) Calcul de : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 9 - 0 + 1 = 9 + 1 = 10$

$$S = u_0 \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2\frac{1 - 1024}{-1} = (-2) \times (-1023) = 2046$$

Exercice8 : Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique et vérifier que sa raison est : $q = \frac{1}{3}$

3) Montrer que : $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

4) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} = q$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 1$et sa raison $q = \frac{1}{3}$

2) a) On a : $u_1 = q \times u_0$ donc $u_1 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

b) On a : $u_2 = q \times u_1$ donc $u_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 1$et sa raison $q = \frac{1}{3}$

On a donc : $u_n = u_0 \times q^n$ donc : $u_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ **:**

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 1$et sa raison $q = \frac{1}{3}$

Alors : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = u_0 \frac{1 - q^{9-0+1}}{1 - q}$

On a donc : $S = 1\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1^{10}}{3^{10}}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{59049}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{59049}\right)$

Donc : $S = \frac{3}{2}\left(\frac{59049}{59049} - \frac{1}{59049}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{59048}{59049}\right) = \frac{3 \times 59048}{2 \times 59049} = \frac{177144}{118098} \simeq 1,49997$

Exercice9 : Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique de raison q tel que $v_0 = 3$et $v_3 = 24$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$

2) Calculer : v_1 et v_2

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) Montrer que : $v_0 + v_1 + \cdots + v_5 = 189$

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(v_n)_n$

Donc : $v_3 = q^3 v_0$

Donc : $24 = q^3 \times 3$

Donc : $q^3 = \frac{24}{3} = 8$

Donc : $q = 2$

2) On a : $v_1 = qv_0$

Donc : $v_1 = 2\times 3 = 6$

On a : $v_2 = qv_1$

Donc : $v_2 = 2\times 6 = 12$

3) v_n en fonction de n ?

Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $v_n = v_0 \times q^n$

Donc : $v_n = 3\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) $v_0 + v_1 + \cdots + v_5 = (\textit{le premier terme dans la somme})\dfrac{1-\textit{raison}^{(\textit{le nombre de termes})}}{1-\textit{raison}}$

$\textit{le nombre de termes} = 5-0+1 = 6$

$S = v_0 \frac{1-2^6}{1-2} = 3\frac{1-64}{-1} = -3\times(-63) = 189$

Exercice10 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = 3u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

1) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer son premier terme et sa raison q

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer u_2 et u_3

4) Calculer : $S_5 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

Solution :1) $u_{n+1} = 3u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_n$ est une suite géométrique premier terme : $u_0 = 2$ et sa raison $q = 3$

2) Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 \times q^{n-0} = u_0 \times q^n = 2\times 3^n$

Donc : $u_n = 2\times 3^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) On a : $u_n = 3\times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_2 = 2\times 3^2 = 2\times 9 = 18$ et $u_3 = 2\times u_2 = 3\times 18 = 54$

4) a) Calcul de : $S_5 = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

$$S = \left(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme\right)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5-0+1=6$

Donc : $S_5 = u_0\frac{1-3^6}{1-3} = 2\frac{1-729}{-2} = (-1)\times(-728) = 728$

Exercice11 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense et le jeune homme répond :
Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement.
Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.
Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.
Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = ...$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1\times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ donc : $u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait : $s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20} = u_1\frac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$

$s_{20} = 2^{20} - 1 = 1048575$ Centimes

Exercice12 : Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ et vérifier que sa raison est : $\frac{1}{2}$

2) Calculer u_1 et u_2

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Déterminer n si on a : $u_n = \frac{1}{16}$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $q = \frac{1}{2}$

2) On a : $u_1 = q \times u_0$ donc $u_1 = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

$u_2 = q \times u_1$ donc $u_2 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

3) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $q = \frac{1}{2}$

On a donc : $u_n = u_0 \times q^n$ donc : $u_n = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) $u_n = \frac{1}{16}$ signifie que : $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16}$ signifie que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{32}$

Signifie que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ Signifie que : $n = 5$

Exercice13 : Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = 5\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer v_0 et v_1 et v_2

2) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

3) Calculer la somme suivante : $S = v_0 + v_2 + \cdots + v_5$

Solution :1) On a : $v_n = 5\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 : on a :$v_0 = 5\times 2^0$ par suite : $v_0 = 5$ car $2^0 = 1$

Pour n=1 : on a :$v_1 = 5\times 2^1$ par suite : $v_1 = 10$

Pour n=2 : on a :$v_2 = 5\times 2^2$ par suite : $v_2 = 20$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5\times 2^{n+1}}{5\times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2 = q$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et son premier terme : $v_0 = 5$

3) puisque la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et son premier terme : $v_0 = 5$

Alors : $S = v_0 \frac{1-q^{5-0+1}}{1-q} = 5\frac{1-2^6}{1-2} = 5\frac{1-2^6}{-1} = -5\left(1-2^6\right) = -5(1-64) = -5\times(-63) = 315$

Exercice14 : Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 7u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ et vérifier que sa raison est : 7

2) Calculer u_2 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = 7u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 7 = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 7$

2) a) On a : $u_1 = q\times u_0$ donc $u_1 = 7\times 3 = 21$

b) On a : $u_2 = q\times u_1$ donc $u_2 = 7\times 21 = 147$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 7$

On a donc : $u_n = u_0 \times q^n$ donc : $u_n = 3 \times 7^n$

3) Calcul en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 7$

Alors : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$

On a donc : $S = 3\dfrac{1-7^{n+1}}{1-7} = 3\dfrac{1-7^{n+1}}{-6} = -\dfrac{1}{2}\left(1-7^{n+1}\right)$

Exercice15 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) Ecrire u_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_{n+1}} = 1 - \dfrac{2}{\dfrac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \dfrac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = 3\left(1 - \dfrac{2}{u_n}\right)$ Donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$ donc $u_n = \dfrac{2}{1-v_n}$

Donc : $u_n = \dfrac{2}{1+3^{n+1}}$