PRODUIT SCALAIRE

Les équations des deux tangentes au cercle à partir d'un point extérieur au cercle

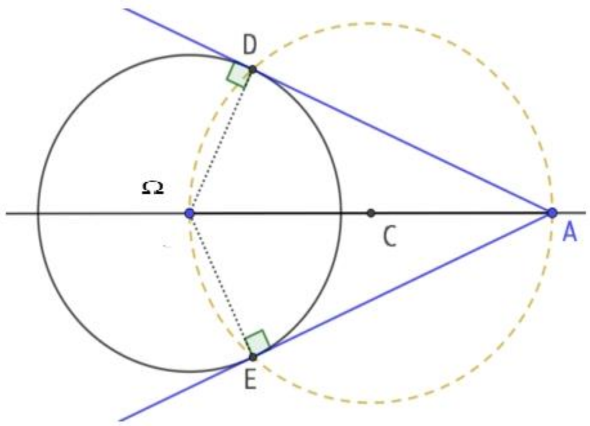
Et équations des deux tangentes au cercle qui sont parallèles à une droite

Mathématiques 1er BAC Sciences Expérimentales et mathématique BIOF

Etant donnés un cercle de centre Ω et un point A n'appartenant pas à ce cercle, on construit la tangente passant par A ainsi :

1. On place le point C milieu du segment [Ω A].
2. On trace le cercle de centre C passant par A et donc aussi par Ω.
3. Ce cercle coupe le cercle de centre Ω aux points D et E.
4. Les droites (AD) et (AE) sont les deux tangentes recherchées.

Explications :
Le cercle de centre C milieu de [Ω A] coupe le cercle de centre Ω en D et en E. D appartient au cercle de diamètre [Ω A] donc ΩDA est un triangle rectangle en D. Ainsi (Ω D) et (DA) sont perpendiculaires, ce qui permet de conclure que (DA) est l'une des deux tangentes recherchées.



Même raisonnement pour E.

Exercice: le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Orthonormé.

(C) *le cercle* de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R=2$

1) Déterminer une équation cartésienne du *cercle* (C)

2) Soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C)

3) Déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

4) Déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x-4y=0$

5) Soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

6) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4}\leq x\leq y$

Solution :1) Une équation cartésienne du *cercle* (C) est : $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

On a : $(-1-2)^2+(0-0)^2-4=9-4\succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

3) Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle ($\mathcal{C}$) et soit : $ax+by+c=0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b)\neq(0;0)$ Puisque (T) est tangente au cercle ($\mathcal{C}$) alors : $d(\Omega,(T))=R$

Cad $\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$: Et on a : $A\in(T)$ donc : $-a+c=0$

Donc on trouve : $b=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b=-\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est :

$2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou $2x+\sqrt{5}y+2=0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle ($\mathcal{C}$) passant par A sont :
(T_1) : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou (T_2) : $2x+\sqrt{5}y+2=0$

4) (D) : $3x-4y=0$ $\Omega(2;0)$

Puisque $(T)\parallel(D)$ donc on pose : (T) : $3x-4y+c=0$ et (T) tangentes au cercle ($\mathcal{C}$)

Donc : $d(\Omega,(T))=R \Leftrightarrow$ cad $\frac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$:

$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5}=2 \Leftrightarrow |6+c|=10 \Leftrightarrow 6+c=10$ Ou $6+c=-10$
$c=4$ ou $c=-16$

Donc les tangentes au cercle ($\mathcal{C}$) sont : (T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

5) a) on va résoudre le système suivant : $\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=2^2\\ y=x\end{cases}$ Donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$

Donc : ($x=0$ ou $x=2$) et $y=x$

Donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points : $O(0;0)$ et $B(2;2)$

6) $\frac{x^2+y^2}{4}\leq x\leq y \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\leq 0\\ x^2+y^2-4x\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\leq 0\\ (x-2)^2+y^2-4\leq 0\end{cases}$

L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4\leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x-y\leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ) Voire la figure ci-dessus :