Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2007(Session Normale)

Exercice1 : 3points (1.5pt +1.5pt)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 12x + 35 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2 - 12x + 35 \leq 0$

Exercice2 : 3points (1.5pt +1.5pt)

1) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + y = 260 \\ x - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases}$

2) Le périmètre d'un champ rectangulaire est de 520 m et sa largeur est égale a 25% de sa longueur. Calculer les dimensions de ce champ

Exercice3 : 4points (2pt +2pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = 10$ et $u_0 = -100$

1) Calculer : u_1 et u_{20}

2) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$

Exercice4 : 3points (1pt +1pt+1pt)

On lance une pièce de monnaie avec F la face et P la pile trois fois de suite.

1) Donner l'arbre des choix de cette expérience aléatoire

2)Quelle est le nombre de possibilités ?

2)Quelle est le nombre de possibilités qui contiennent F deux fois exactement ?

Exercice5 : 7points (1pt +1pt +1.5pt +1pt+ +1pt 1.5pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3) Vérifier que : $\forall x \in D_f$; $f'(x) = 3x(x-2)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire le tableau de variations de f sur D_f

6) Calculer : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

8) Tracer la courbe (C_f)

Solution :

Exercice1 :

1) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - 12x + 35 = 0$: a = 1, b =-12et c = 35

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 35 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1 = \frac{12+\sqrt{4}}{2\times1} = \frac{12+2}{2} = \frac{14}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{12-\sqrt{4}}{2\times1} = \frac{12-2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

2) $x^2 - 12x + 35 \leq 0$

Les racines sont : $x_1 = 7$ et $x_2 = 5$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		5		7		$+\infty$
$x^2-12x+35$		+	0	−	0	+	

D'où : $S = [5;7]$

Exercice2 :

1) $\begin{cases} x + y = 260 \\ x - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 260 \\ 4\left(x - \frac{1}{4}y\right) = 4\times0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 260 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$\begin{cases} x + y = 260 \ (1) \\ 4x - y = 0 \ \ (2) \end{cases}$ Équivaut à : $(2)+(1)$ $x + y + 4x - y = 260 + 0$

Équivaut à : $5x = 260 \Leftrightarrow x = \frac{260}{5} = 52$ et on remplace dans : $x + y = 260$

Équivaut à : $52 + y = 260$ C'est à dire : $y = 260 - 52 = 208$

Donc : $S = \{(52, 208)\}$

3) Soient : x la largeur de ce champ et y la longueur de ce champ

Puisque sa largeur est égale à 25% de sa longueur alors : $x = \frac{25}{100}y$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{4}y$

Donc : $x - \frac{1}{4}y = 0 \ (1)$

Le périmètre d'un champ rectangulaire est de 520 m

Donc : $2x + 2y = 520 \ (2)$

Donc : $x + y = 260 \ (2)$

Il suffit de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 260 \\ x - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases}$

On a trouvé que : $\begin{cases} x = 52 \\ y = 208 \end{cases}$

Donc : la largeur de ce champ est : 52 et la longueur de ce champ est : 208

Exercice3 :

1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = -100$ et sa raison $r = 10$

$u_1 = u_0 + r = -100 + 10 = -90$

Et Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique

Alors : $u_n = u_0 + nr = -100 + 10n$

$u_n = -100 + 10n$ Donc : $u_{20} = -100 + 10 \times 20 = -100 + 200 = 100$

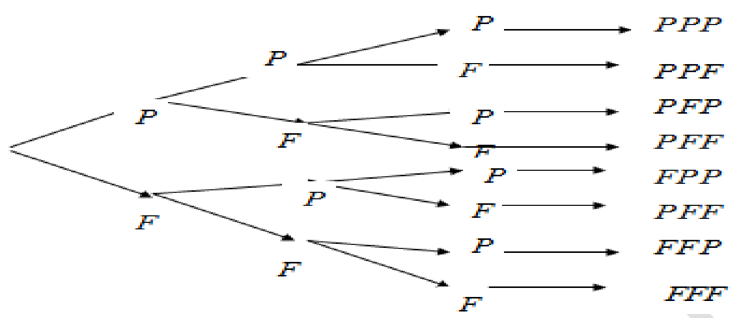
2) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_{20}}{2}$$

$$S = 21\frac{-100+100}{2} = 21 \times \frac{0}{2} = 21 \times 0 = 0$$

Exercice4 :

1)



2)

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2

Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 3 fois : P (pile) ou F (face)
D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est : $n = 2 \times 2 \times 2 = 8$

L'ensemble des possibilités est : $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$

$8 = card\,\Omega$ (Le nombre d'élément de l'ensemble Ω)
L'ensemble des possibilités qui contiennent F deux fois exactement est :
$A = \{PFF; FPF; FFP\}$ il Ya 3 possibilités : $3 = cardA$

Exercice5:

1) On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 3 \times 2x = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x(x-2)$

$3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Le tableau de signe est le suivant :
$f'(x) = 3x^2 - 6x$ $a = 3 \succ 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[0;2]$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(x)=x^3-3x^2$

Donc : $f(0)=0^3-3\times0^2=0-0=0$

$f(2)=2^3-3\times2^2=8-12=-4$

6) Calcul de : $f(3)$ et $f(1)$ et $f(-1)$

On a : $f(x)=x^3-3x^2$

Donc : $f(1)=1^3-3\times1^2=1-3=-2$

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2=-1-3=-4$

$f(3)=3^3-3\times3^2=27-27=0$

7) Détermination de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 ?
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a=3$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T):y=f(3)+f'(3)(x-3)$

On a : $f(3)=0$ Et on a : $f'(x)=3x(x-2)$

Donc : $f'(3)=3\times3(3-2)=9\times1=9$

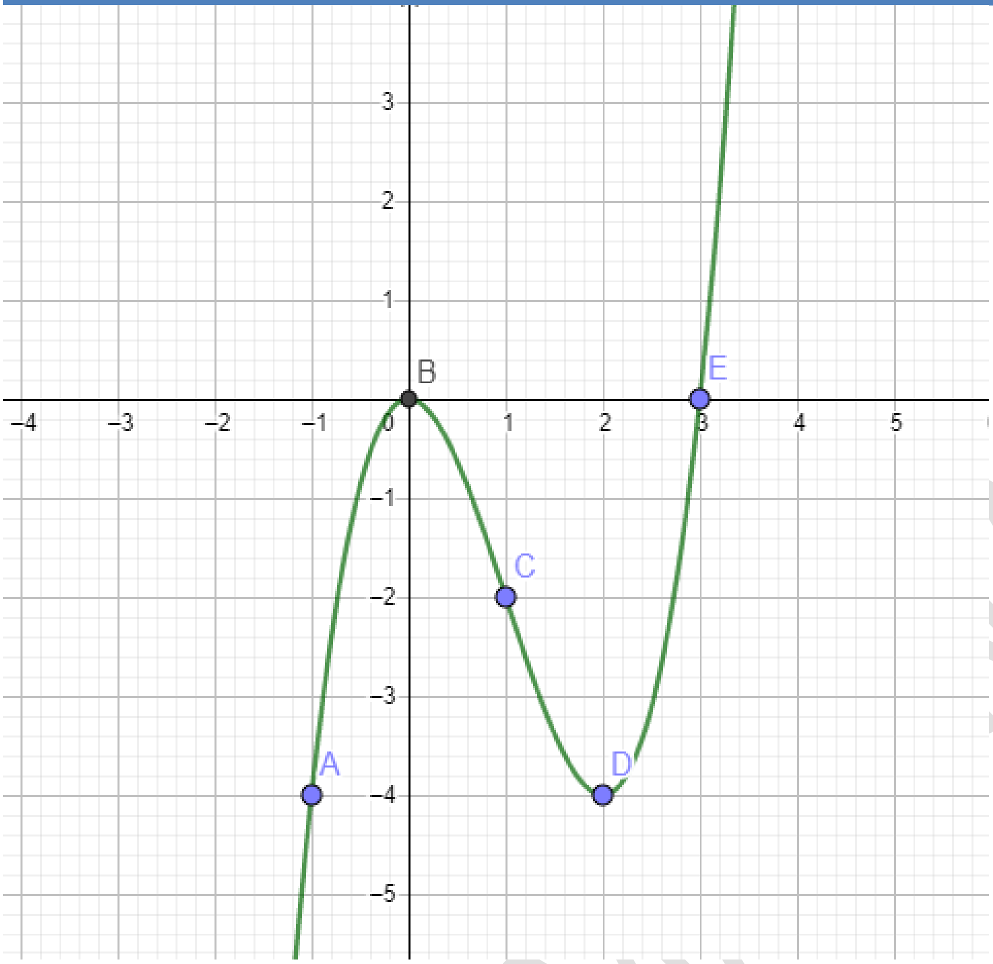
Donc : $(T):y=0+9(x-3)$

Donc : $(T):y=9x-27$

8) Traçage de la courbe (C_f):

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-1	0	1	2	3	
f(x)	-4	0	-2	-4	0	


A
B
C
D
E
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−5