Région Tanger Tétouan Al Hoceima 2014(Session Normale)

Exercice1 : 6points (1pt +0.5pt +1pt +1.5pt +1pt+1pt)

1)Le nombre de filles et de garçons dans une établissement scolaire est 1640

Calculer le nombre de garçons et de filles dans cet établissement sachant que le pourcentage des filles est 35%

2)Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2+7x+5=0$

a) Vérifier que le discriminent de cette équation est : $\Delta=9$

b) En déduire les deux solutions de cette équation

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2x^2+7x+5\leq 0$

3) a) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x+y=38 \\ x+2y=55 \end{cases}$

b) Un immeuble comprend 38 appartements de deux catégories : des appartements de deux pièces et des appartements de quatre pièces.

Déterminez le nombre d'appartements de chaque catégorie, si on sait que le nombre total de pièces dans cet immeuble est de 110

Exercice2 : 4points (1pt +2pt +1pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_1=-2$ et $u_2=3$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $r=5$

2) Calculer u_0 et Vérifier que : $u_{17}=78$

3) Calculer la somme suivante : $S=u_1+u_2+\cdots+u_{17}$

Exercice3: 2points (1pt +1pt)

Une urne contient 5 boules vertes et 4 boules blanches.

On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est : 84

2) Combien y a-t-il de tirages contenant exactement deux boules de même couleur ?

Exercice4 : 2points (1pt +1pt)

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{2x-4}$

2) Calculer la dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

Exercice5 : 6points (1pt +1pt +0.75pt+0.75pt+1pt +1pt+0.5pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+3x+2$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=3x^2+3$

b) Montrer que f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$

et Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

3) Calculer : $f(0)$ *et* $f(1)$ *et* $f(-1)$

4) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 0

b) Tracer la courbe (C_f).

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=0$

Solution :

Exercice1 : a) le pourcentage des garçons est :100% -35% = 65%

Le nombre des garçons est :$G = 1640 \times \frac{65}{100} = 1066$

b) Dans ce lycée 35 % sont des filles

Donc : le nombre de filles est : $F = 1640 \times \frac{35}{100} = 574$

2)a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 + 7x + 5 = 0$: a = 2, b =7 et c = 5
Donc : Δ = b^2 – 4ac = 7^2 – 4 x 2 x 5 = 49-40 =9.
b) Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

Les solutions sont : $x_1 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-7+3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-7-3}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$

c) $2x^2 + 7x + 5 \leq 0$

Les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{5}{2}$

On donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		-1		$+\infty$
$2x^2+7x+5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $S = \left[-\frac{5}{2};-1\right]$

3) a) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x + y = 38 \ (1) \\ x + 2y = 55 \ (2) \end{cases}$

Utilisons la méthode par combinaison linéaire :

$\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2y = 55 \end{cases}$ Équivaut à : $(2)-(1)$ $x + 2y - x - y = 55 - 38$

Équivaut à : $y = 17$ et on remplace dans : $x + y = 38$

$x = 38 - 17 = 21$ C'est à dire : $\begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$

Donc : $S = \{(21,17)\}$

b) soient : x le nombre des appartements de deux pièces et y le nombre des appartements de quatre pièces
Puisqu'il Ya 38 appartements des deux catégories alors : $x + y = 38 \ (1)$
Puisque le nombre total de pièces dans cet immeuble est de 110 alors : $2x + 4y = 110$
Donc : le nombre total de pièces dans cet immeuble est : $x + 2y = 55$

Il suffit de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 38 \ (1) \\ x + 2y = 55 \ (2) \end{cases}$

On a trouvé que : $\begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$

Donc : Le nombre des appartements de deux pièces est : 21
Le nombre des appartements de quatre pièces est : 17

Exercice2 : 1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$

Donc : sa raison est : $r = u_2 - u_1 = 3-(-2) = 3+2 = 5$

Donc : $r = 5$

2) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc on a : $u_1 = u_0 + r$

Donc : $-2 = u_0 + 5$

Donc : $-2-5 = u_0$

Donc : $u_0 = -7$

Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = -7$ et sa raison $r = 5$

Donc : $u_n = u_0 + nr = -7+5n$

$u_n = -7+5n$ Donc : $u_{17} = -7+17\times 5 = -7+85 = 78$

3) Calcul de la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{17}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{17} = (17-1+1)\frac{u_1+u_{17}}{2} = 17\frac{-2+78}{2} = 17\frac{76}{2} = 17\times 38 = 646$$

Exercice3 : 1) Lorsque l'on effectue des tirages simultanés de boules dans une urne, le nombre de résultats possibles est donné par une formule mathématique

appelée combinaison : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Dans ce cas, les résultats obtenus ne dépendent pas de l'ordre des boules tirées

Plus mathématiquement, si l'on tire p boules simultanément dans une urne contenante n boules

Il y a : C_n^p tirages possibles

1) Dans l'urne il Ya :9 boules et on tire simultanément 3 boules de cette urne

Donc : $card\,\Omega = C_9^3 = \dfrac{A_9^3}{3!} = \dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2} = \dfrac{3\times 3\times 2\times 4\times 7}{3\times 2} = 3\times 4\times 7 = 84$

Donc : Le nombre de tirages possibles est 84.

3) Tirer 2 boules exactement de mêmes couleurs signifie : tirer 2 boules blanches et une verte
OU tirer 2 boules verte et une blanche
OU tirer 2 boules noires **OU** c'est : **+** **et** c'est : **x**
Le nombre de possibilités de tirer exactement 2 boules de mêmes couleurs est :
$C_4^2\times C_5^1 + C_5^2\times C_4^1$

$C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{4\times 3}{2} = 6$ et $C_5^2 = \dfrac{A_5^2}{2!} = \dfrac{5\times 4}{2} = 10$ et $C_4^1 = 4$ et $C_5^1 = 5$

Remarque : $C_n^1 = n$

Donc : Le nombre de possibilités de tirer exactement 2 boules de mêmes couleurs est :
$6\times 5 + 10\times 4 = 30+40 = 70$

Exercice4 : 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{2x-4} = ?$ On a : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-4 = 0^-$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2x-4$	$-$ 0 $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{2x-4} = -\infty$

2) Calcul de : $f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1)-(2x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

Donc : $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice5 : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x+2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x+2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$: $\quad f'(x) = (x^3+3x+2)' = 3x^2+3$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2+3 \succ 0$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}$

le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) $f(x) = x^3+3x+2$

$f(0) = 0^3+3\times 0+2 = 0+0+2 = 2$

$f(1) = 1^3+3\times 1+2 = 1+3+2 = 6$

$f(-1) = (-1)^3+3\times(-1)+2 = -1-3+2 = -2$

4) a) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

Est : $(T): y = f(a)+f'(a)(x-a)$

On a : $a = 0$ donc : L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Est : $(T): y = f(0)+f'(0)(x-0)$

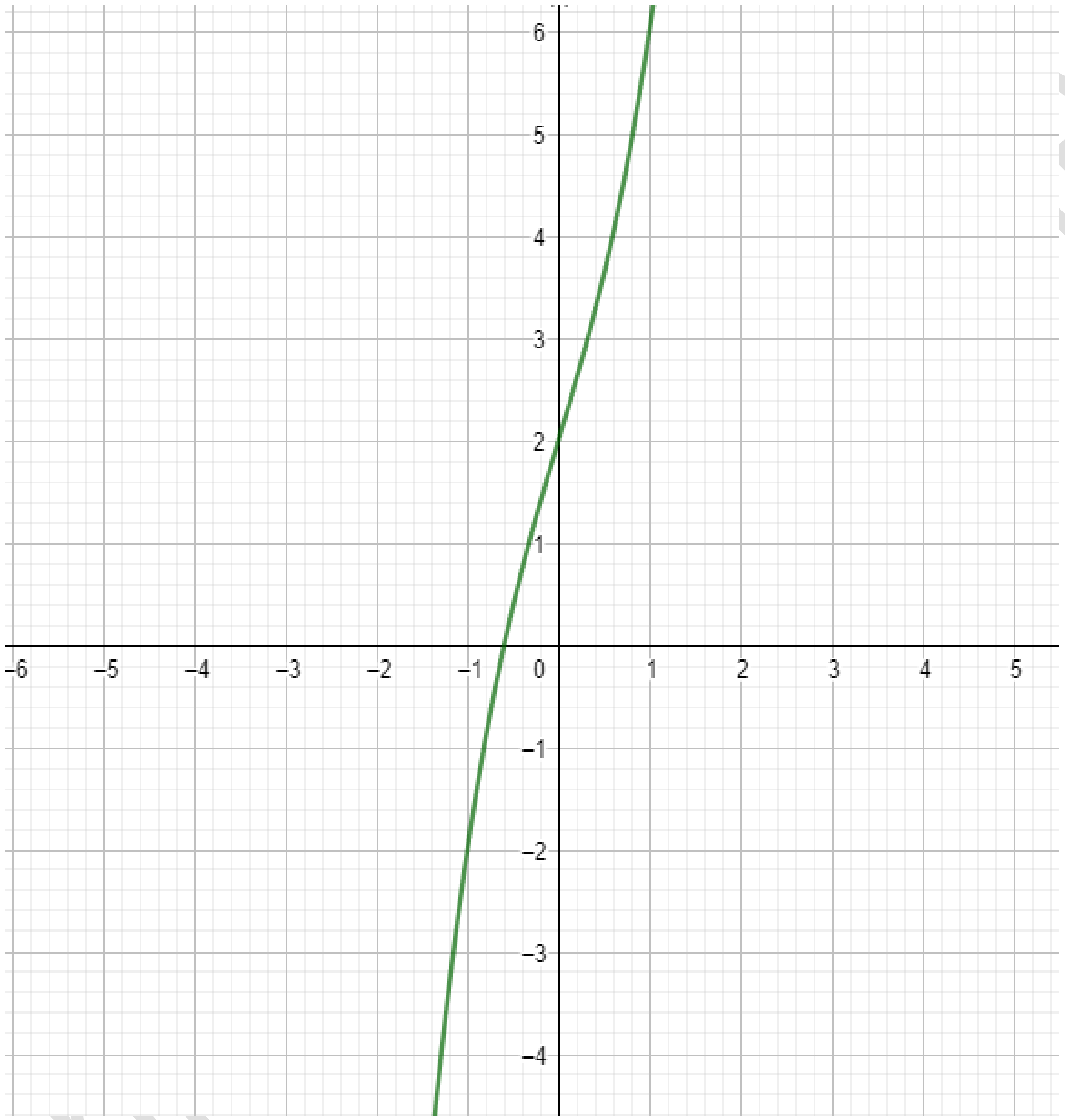
On a : $f(0) = 0^3+3\times 0+2 = 0+0+2 = 2$

Et on a : $f'(x)=3x^2+3$

Donc : $f'(0)=3\times0^2+3=3$

Donc : $(T): y=2+3(x-0)$ Donc : $(T): y=2+3x$

b) La courbe (C_f). :



c) Graphiquement l'équation : $f(x)=0$ admet une seule solution car la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point