Correction : devoir à la maison N°2 sur les leçons suivantes :
Ensemble des nombres réels et sous-ensembles et Ordre dans IR

Exercice1 : factorisez les expressions suivantes :

$A = 4x^2 - (x-1)^2$ $B = 8x^3 + 27$

$C = x^3 + 1 + 2(x^2 - 1) - (x+1)$

Solution :

$A = 4x^2 - (x-1)^2 = (2x)^2 - (x-1)^2 = (2x - (x-1))(2x + (x-1))$

$A = (2x - x + 1)(2x + x - 1)$

$A = (x+1)(3x-1)$

Pour $B = 8x^3 + 27$ on Remarque que :

$B = 8x^3 + 27$ Identité remarquable du type :

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$B = 8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x+3)((2x)^2 - 2x \times 3 + 3^2)$

$= (2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$

$C = x^3 + 1 + 2(x^2 - 1) - (x+1)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$C = x^3 + 1^3 + 2(x^2 - 1^2) - (x+1)$

$C = (x+1)(x^2 - 1x + 1^2) + 2(x-1)(x+1) - (x+1) \times 1$

$C = (x+1)((x^2 - x + 1) + 2(x-1) - 1)$

$C = (x+1)(x^2 - x + 1 + 2x - 2 - 1)$

$C = (x+1)(x^2 + x - 2)$

Exercice2 : Calculer et simplifier :

$$G = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \times \frac{2^8}{10^2 \times 5}$$

Solution:

$$G = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \times \frac{2^8}{10^2 \times 5} = \frac{5^6 \times 2^{-6}}{(2^2 \times 5^2)^2} \times \frac{2^8}{(2^2 \times 5^2) \times 5}$$

$$G = \frac{5^6 \times 2^{-6} \times 2^8}{2^4 \times 5^4 \times 2^2 \times 5^2 \times 5} = \frac{5^6 \times 2^2}{2^6 \times 5^7} = \frac{1}{2^4 \times 5} = \frac{1}{80}$$

Exercice3 : On pose : $a = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}}$ et $b = \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$

1)Montrer que : $a \times b = 1$

2)On pose : $u = a + b$ et $V = a - b$

Calculer u^2 et v^2

3)En déduire une écriture des nombres u et v

4) En déduire une écriture des nombres a et b

Solution:1)

$ab = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}}\sqrt{19 - 6\sqrt{10}} = \sqrt{(19 + 6\sqrt{10})(19 - 6\sqrt{10})}$

$ab = \sqrt{19^2 - (6\sqrt{10})^2} = \sqrt{361 - 360} = \sqrt{1} = 1$

2) $u = a + b$ et $V = a - b$

$u^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2 \times 1$

Donc : $u^2 = 19 + 6\sqrt{10} + 19 - 6\sqrt{10} + 2 \times 1 = 40$

$v^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2 \times 1$

Donc : $v^2 = 19 + 6\sqrt{10} + 19 - 6\sqrt{10} - 2 \times 1 = 36$

3) déduction des nombres u et v :

On a : $u^2 = 40$ Donc : $u = \sqrt{40}$ ou $u = -\sqrt{40}$

Or on a $u = a + b$ somme de deux nombres positifs

Alors : $u = a + b$ est positif donc : $u = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$

On a : $v^2 = 36$ Donc $v = \sqrt{36}$ ou $v = -\sqrt{36}$

Or on a : $v = a - b$ et on Remarque que $a > b$

Donc : $v = a - b$ est positif donc : $v = \sqrt{36} = 6$

4) déduction des nombres a et b

On a: $\begin{cases} u = 2\sqrt{10} \\ v = 6 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a + b = 2\sqrt{10} \\ a - b = 6 \end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$2a = 6 + 2\sqrt{10}$ Donc : $a = \frac{6 + 2\sqrt{10}}{2} = 3 + \sqrt{10}$

Et on a: $a + b = 2\sqrt{10}$ Donc: $b = 2\sqrt{10} - a$

Donc: $b = 2\sqrt{10} - 3 - \sqrt{10}$ cad $b = \sqrt{10} - 3$

Exercice4 : Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty, -2[$

Comparer : **5 et** $-4x - 1$ en utilisant les propriétés de l'ordre

Solution : on a $x \in]-\infty, -2[$ donc : $x \prec -2$

Donc : $-4x \succ -4 \times (-2)$ donc : $-4x \succ 8$

Donc : ① $-4x - 1 \succ 7$ et on sait que : $7 \succ 5$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-4x - 1 \succ 5$

Exercice5 : x un nombre réel positif

Comparer : $2\sqrt{x} - 1$ **et** x

Solution :

$x - (2\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \times 1 + 1^2 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$

Donc : $x \geq 2\sqrt{x} - 1$ si $x \in \mathbb{R}^+$

Exercice6 : x et y deux nombres réels tel que :

$x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ et $y \in]-\infty; 2]$ et $x - y = 4$

1) Simplifier : $A = \sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(3y-6)^2}$

2)Montrer que : $\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ et $-\frac{11}{3} \leq y \leq 2$

3) Calculer la valeur de : $B = \left|x + y + \frac{10}{3}\right| + |x + y - 8|$

Solution :1) $x \geq \frac{1}{3}$: que Signifie $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

$y \in]-\infty; 2]$ Signifie que : $y \leq 2$

$A = \sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(3y-6)^2} = |3x-1| + |3y-6|$

On a : $x \geq \frac{1}{3}$ donc : $3x \geq 1$ donc : $3x - 1 \geq 0$

On a : $y \le 2$ donc : $3y \le 6$ donc : $3y-6 \le 0$

$A=3x-1-(3y-6)$

$A=3x-1-3y+6=3x-3y+5=3(x-y)+5$ or $x-y=4$

$A=3\times 4+5=17$

2)a) Montrons que : $\frac{1}{3}\le x \le 6$???

Il suffit de montrer que : $x \le 6$???

On a : $y \le 2$ et on a : $x-y=4$ donc : $x-4=y$

Donc : $x-4\le 2$

Donc : $x \le 2+4$

Donc : $x \le 6$

b) Montrons que : $-\frac{11}{3}\le y \le 2$???

Il suffit de montrer que : $-\frac{11}{3}\le y$???

On a : $x \ge \frac{1}{3}$ et on a : $x-y=4$ donc : $x=y+4$

Donc : $y+4\ge \frac{1}{3}$

Donc : $y \ge \frac{1}{3}-4$

Donc : $y \ge \frac{-11}{3}$

3) $B=\left|x+y+\frac{10}{3}\right|+\left|x+y-8\right|$

Etude du signe de : $x+y+\frac{10}{3}$ et $x+y-8$

On a : $\frac{1}{3}\le x \le 6$ et $-\frac{11}{3}\le y \le 2$

Donc : $\frac{1}{3}+\left(-\frac{11}{3}\right)\le x+y \le 6+2$

Donc : $-\frac{10}{3}\le x+y \le 8$

Donc : $0\le x+y+\frac{10}{3}$ et $x+y-8\le 0$

Donc : $B=\left|x+y+\frac{10}{3}\right|+\left|x+y-8\right|=x+y+\frac{10}{3}-(x+y-8)$

Donc : $B=x+y+\frac{10}{3}-x-y+8=\frac{10}{3}+8=\frac{34}{3}$

Exercice7 : Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1) $|2x-1|=1$ 2) $|x-3|=|4x-1|$

3) $|3x-1|<5$ 4) $\begin{cases}-4<x\\ x-2\le 0\end{cases}$

Solution :1) $|2x-1|=1$ signifie $2x-1=1$ ou $2x-1=-1$

signifie $2x=2$ ou $2x=0$

signifie $x=1$ ou $x=0$ donc $S=\{0;1\}$

2) $|x-3|=|4x-1|$ signifie $x-3=4x-1$ ou $x-3=-(4x-1)$

signifie $-3x=2$ ou $x-3=-4x+1$

signifie $x=-\frac{2}{3}$ ou $5x=4$

signifie $x=-\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{4}{5}$ donc : $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right\}$

3) $|3x-1|<5$ signifie $-5<3x-1<5$

signifie $-5+1<3x-1+1<5+1$ signifie $-4<3x<6$

signifie $-4\times\frac{1}{3}<3x\times\frac{1}{3}<6\times\frac{1}{3}$ signifie $-\frac{4}{3}<x<2$

Donc : $S=\left]-\frac{4}{3};2\right[$

4) $\begin{cases}-4<x\\ x-2\le 0\end{cases}$

$-4<x$ signifie $x\in\left]-4,+\infty\right[$

$x-2\le 0$ ssi $x\le 2$ signifie $x\in\left]-\infty,2\right]$

Donc : $S=\left]-4,+\infty\right[\cap\left]-\infty,2\right]=\left]-4,2\right]$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien