*TD : exercices*

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

http://www.xriadiat.com

# Correction :Serie4 d'exercices de préparation sur les : SUITES

**Exercice1 :** Compléter les suites de nombres suivantes :

1) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; … ; … ; … ;
2) -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; … ; …. ;… ;…. ;
3) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; …. ;… ;…..
4) 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; …. ;… ;…..

**Solution :**

1) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ;15
2) -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; 7 ; 10 13 16 ;
3) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 32 ;64
4) 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 36 49

**Exercice2 :** Soit $(u_n)_n$ une suite tel que :

$u_n = 3n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : $u_0$ et $u_1$ et $u_3$ et $u_4$

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est Arithmétique de raison : $r=3$

3) Vérifier que : $u_{19}=58$

4) Calculer la somme suivante :

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{19}$

**Solution :** 1) : $u_n = 3n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_0 = 3\times 0+1=1$

$u_1 = 3\times 1+1=3+1=4$

2)

$u_{n+1}-u_n = (3(n+1)+1)-(3n+1)=3n+3+1-3n-1=3=r$

Donc : $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 1$ et sa raison : $r=3$

3) $u_{19} = 3\times 19+1=57+1=58$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_0+u_1+\cdots+u_{19} = (19-0+1)\frac{u_0+u_{19}}{2}$$

$$S = 20\frac{1+58}{2} = 10\times 59 = 590$$

**Exercice3 :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Calculer : $u_1;u_2;u_3$

**Solution : On** a $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour n=0 on a : $u_{0+1} = 5u_0 - 7$ donc $u_1 = 5\times 2 - 7$

Donc : $u_1 = 3$

Pour n=1 on a: $u_{1+1} = 5u_1 - 7$ donc $u_2 = 5\times 3 - 7$

Donc : $u_2 = 8$

Pour n=2 on a: $u_{2+1} = 5u_2 - 7$ donc $u_3 = 5\times 8 - 7$

Donc : $u_3 = 33$

**Exercice4 :** Soit la suite $(v_n)_n$ définie par :

$v_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer $v_0$ et $v_1$ et $v_2$

2) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

**Solution :1)** On a : $v_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 : on a :$v_0 = 2\times 3^0$ par suite : $v_0 = 2$

Pour n=1 : on a :$v_1 = 2\times 3^1$ par suite : $v_1 = 6$

Pour n=2 : on a :$v_2 = 2\times 3^2$ par suite : $v_2 = 18$

2) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n} = 3 = q$

Donc la suite est géométrique de raison $q=3$ et son premier terme : $v_0 = 2$

**Exercice5 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$u_n = \dfrac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1

2)Montrer que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$

3) Que peut-on dire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Solution :1)** Montrons que : $u_n \le 1$ ??

$1-u_n = 1-\dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1} = \dfrac{n}{2n+1} \ge 0$

Donc $u_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**2)**Montrons que : $\frac{1}{2} < u_n$ ??

$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0$

Donc $\frac{1}{2} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 car $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

**Exercice6 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$u_n = \frac{-n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

**Solutions : Soit** $n \in \mathbb{N}$ on a :

$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right) - \left(\frac{-n}{n+2}\right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{(-n-1)(n+2)+n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

**Exercice7 :** Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r$ tel que : $u_3 = -4$ et $u_8 = 6$

1) Calculer la raison $r$ de cette suite

2) Ecrire $u_n$ en fonction de n

3) Calculer la somme suivante :

$S = u_8 + u_9 + \cdots + u_{57}$

**Solution :**1) la raison $r$ ??

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 8 et p = 3 on a :$u_8 = u_3 + (8-3)r$

Donc : $u_8 = u_3 + 5r$

Donc : $6 = -4 + 5r \Leftrightarrow 10 = 5r \Leftrightarrow \frac{10}{5} = r \Leftrightarrow r = 2$

2) $u_n$ en fonction de n ?

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : $u_n = u_3 + (n-3)\times 2$

Donc : $u_n = -4 + 2n - 6$

Donc : $u_n = 2n - 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de la somme suivante :

$S = u_8 + u_9 + \cdots + u_{57}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$S = u_8 + u_9 + \cdots + u_{57} = (57-8+1)\frac{u_8 + u_{57}}{2}$

$S = 50\frac{u_8 + u_{57}}{2}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 10$

Donc : $u_{57} = 2\times 57 - 10 = 114 - 10 = 104$

Donc : $S = 25(6+104) = 25\times 110 = 2750$

**Exercice8 :** Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r$ tel que : $u_2 = -1$ et $u_6 = 11$

1) Calculer la raison $r$ de cette suite

2) Ecrire $u_n$ en fonction de n

3) Calculer la somme suivante :

$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{15}$

**Solution :**1) la raison $r$ ??

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 6 et p = 2 on a :$u_6 = u_2 + (6-2)r$

Donc : $u_6 = u_2 + 4r$

Donc : $11 = -1 + 4r \Leftrightarrow 12 = 4r \Leftrightarrow \frac{12}{4} = r \Leftrightarrow r = 3$

2) $u_n$ en fonction de n ?

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : $u_n = u_2 + (n-2)\times 3$

Donc : $u_n = -1 + 3n - 6$

Donc : $u_n = 3n - 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de la somme suivante :

$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{15}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{15} = (15-2+1)\frac{u_2 + u_{15}}{2}$

$S = 14\frac{u_2 + u_{15}}{2} = 7(-1 + u_{15})$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3n - 7$

Donc : $u_{15} = 3\times 15 - 7 = 45 - 7 = 38$

Donc : $S = 7(-1+38) = 7\times 37 = 259$

**Exercice9 :** Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique de raison $q$ tel que $v_0 = 3$ et $v_3 = 24$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$

2) Calculer : $v_1$ et $v_2$

3) Ecrire $v_n$ en fonction de n

4) Montrer que : $v_0 + v_1 + \cdots + v_5 = 189$

**Solutions :** 1) la raison $q$ ??

On a : une suite géométrique est $(v_n)_n$

Donc : $v_3 = q^3 v_0$

Donc : $24 = q^3 \times 3$

Donc : $q^3 = \dfrac{24}{3} = 8$

Donc : $q = 2$

2) On a : $v_1 = qv_0$

Donc : $v_1 = 2\times 3 = 6$

On a : $v_2 = qv_1$

Donc : $v_2 = 2\times 6 = 12$

3) $v_n$ en fonction de n ?

Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $v_n = v_0 \times q^n$

Donc : $v_n = 3\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) $v_0 + v_1 + \cdots + v_5 =$

$$\left(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme\right)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5 - 0 + 1 = 6$

$$S = v_0 \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3\frac{1 - 64}{-1} = -3\times(-63) = 189$$

**Exercice10 :** Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique de raison tel que $v_2 = 18$ et $v_4 = 162$

1) Déterminer la raison de la suite $(v_n)_n$

2) Calculer : $v_3$ et $v_5$

3) Ecrire $v_n$ en fonction de n

4) Montrer que : $v_2 + v_3 + \cdots + v_5 = 720$

**Solutions :** 1) la raison $q$ ??

On a : une suite géométrique est $(v_n)_n$

Donc : $v_4 = q^2 v_2$

Donc : $162 = q^2 \times 18$

Donc : $q^2 = \dfrac{162}{18} = 9$

Donc : $q = \sqrt{9}\ ou\ q = -\sqrt{9}$

Or : $q$ positive donc : $q = 3$

2) On a : $v_3 = qv_2$

Donc : $v_3 = 3\times 18 = 54$

On a : $v_5 = qv_4$

Donc : $v_5 = 3\times 162 = 486$

3) $v_n$ en fonction de n ?

Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $v_n = v_2 \times q^{n-2}$

Donc : $v_n = 18\times 3^{n-2} = 2\times 3^2 \times 3^{n-2} = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) $v_2 + v_3 + \cdots + v_5 =$

$$\left(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme\right)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5 - 2 + 1 = 4$

$$S = v_2 \frac{1 - 3^4}{1 - 3} = 18\frac{1 - 81}{-2} = -9\times(-80) = 720$$

**Exercice11:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2) a) Ecrire $v_n$ en fonction de n

b) En déduire $u_n$ en fonction de n

c) Calculer la somme suivante :

$S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{2021}$

**Solution :**1) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$

$=\frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1}-\frac{1}{u_n-1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{1}{u_n-1}=1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

2) a) Ecriture de $v_n$ en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0+nr=1+n\times1=1+n$

b) Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\frac{1}{v_n}$

Donc : $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n=\frac{v_n+1}{v_n}=\frac{1+(n+1)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$

c) Calcul de la somme suivante :

$S=v_0+v_1+...+v_{2021}$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Une suite arithmétique donc :

$S=v_0+v_1+...+v_{2021}=(2021-0+1)\frac{v_0+v_{2021}}{2}$

$S=2022\frac{1+2022}{2}=1011\times2023=2045253$

**Exercice12:** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3} \\ u_0=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=\frac{1}{u_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: $u_1$ ; $v_0$

2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

d) Calculer la somme suivante :

$s_n=v_0+v_1+...+v_{32}$

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{5u_0-1}{u_0+3}$

Donc : $u_1=\frac{5\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{6}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{3}{7}$

Et on a : $v_n=\frac{1}{u_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : pour n=0 on : $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1-u_n-3}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-4}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=-2$

a) Ecriture de $v_n$ en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=-2$

Donc : $v_n=v_0+nr=-2+n\times\frac{1}{4}=-2+\frac{n}{4}=\frac{n-8}{4}$

b) Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\frac{1}{v_n}$

Donc : $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n = \frac{1}{\frac{n-8}{4}} + 1 = \frac{4}{n-8} + 1 = \frac{4+n-8}{n-8} = \frac{n-4}{n-8}$

d) On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique donc

$s_n = v_0 + v_1 + ... + v_{32} = (32-0+1)\frac{v_0 + v_{32}}{2}$

$s_n = 33\frac{-2+v_{32}}{2}$

On a : $v_n = \frac{n-8}{4}$ donc : $v_{32} = \frac{32-8}{4} = 6$

Donc : $s_n = 33\frac{-2+6}{2} = 33\times 2 = 66$

**Exercice13 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**1)** Calculer: $u_1$ ; $u_2$ ; $v_0$ et $v_1$

2) Montrer par récurrence que : $u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{2}{3}u_0 + 1$

Donc : $u_{0+1} = \frac{2}{3}\times 1 + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$

Donc : $u_1 = \frac{5}{3}$

Pour n=1 on : $u_{1+1} = \frac{2}{3}u_1 + 1$

Donc : $u_2 = \frac{2}{3}\times\frac{5}{3} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{10}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9}$

On a : $v_n = u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3$

Donc : $v_0 = -2$

Pour n=1 on : $v_1 = u_1 - 3 = \frac{5}{3} - 3 = \frac{5-9}{3} = \frac{-4}{3}$

Donc : $v_1 = -\frac{4}{3}$

2) Montrons que : $u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0 = 1 \leq 3$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $u_n \leq 3$
- Montrons que : $u_{n+1} \leq 3$ ?

$3 - u_{n+1} = 3 - \left(\frac{2}{3}u_n + 1\right) = 3 - \frac{2}{3}u_n - 1 = 2 - \frac{2u_n}{3} = \frac{6-2u_n}{3} = \frac{2(3-u_n)}{3}$

On a : $u_n \leq 3$ donc $3 - u_n \geq 0$

Donc : $\frac{2(3-u_n)}{3}$

Donc : $u_{n+1} \leq 3$

Donc d'après le principe de récurrence :

$u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = \frac{2u_n + 3 - 3u_n}{3} = \frac{-u_n + 3}{3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{3-u_n}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $u_n \leq 3$ donc : $3 - u_n \geq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{3-u_n}{3} \geq 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc :

$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ....... \leq u_n$

Donc : $u_0 \leq u_n$

Donc : $1 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

**c)** la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3 car $u_n \leq 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 car $1\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ ?

$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2$

$v_{n+1}=\frac{2u_n-6}{3}=\frac{2\left(u_n-3\right)}{3}=\frac{2}{3}\left(u_n-3\right)$

Donc : $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$

Donc : $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$

et son premier terme : $v_0=-2$

b) Puisque : $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q=\frac{2}{3}$ et son premier terme : $v_0=-2$ alors :

$v_n=v_0\times q^n=\left(-2\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) on a : $v_n=u_n-3 \Leftrightarrow v_n+3=u_n$

Et on a : $v_n=-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc : $u_n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

**Exercice14 :** Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1 \\ u_0=1 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et soit la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

**1)** Calculer: $u_1$ ; $u_2$ ; $v_0$ et $v_1$

2) Montrer par récurrence que : $u_n\leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

4) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ et $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

a) Calculer : $S_n$ en fonction de n

b) En déduire $T_n$ en fonction de n

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{1}{2}u_0+1$

Donc : $u_1=\frac{1}{2}\times 1+1=\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$

Donc : $u_1=\frac{3}{2}$

Pour n=1 on : $u_{1+1}=\frac{1}{2}u_1+1$

Donc : $u_2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+1=\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$

On a : $v_n=u_n-2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0=u_0-2=1-2=-1$

Donc : $v_0=-1$

Pour n=1 on : $v_1=u_1-2=\frac{3}{2}-2=\frac{3-4}{2}=\frac{-1}{2}$

Donc : $v_1=-\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $u_n\leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0=1\leq 2$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $u_n\leq 2$
- Montrons que : $u_{n+1}\leq 2$ ?

$2-u_{n+1}=2-\left(\frac{1}{2}u_n+1\right)=2-\frac{1}{2}u_n-1=1-\frac{u_n}{2}=\frac{2-u_n}{2}$

On a : $u_n\leq 2$ donc $2-u_n\geq 0$

Donc : $\frac{2-u_n}{2}\geq 0$

Donc : $u_{n+1} \leq 2$

Donc d'après le principe de récurrence :

$u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = \frac{u_n + 2 - 2u_n}{2} = \frac{-u_n + 2}{2}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $u_n \leq 2$ donc : $2 - u_n \geq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc :

$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ....... \leq u_n$

Donc : $u_0 \leq u_n$

Donc : $1 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

**c)** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2 car $u_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $1$ car $1 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ ?

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{u_n}{2} - 1 = \frac{u_n - 2}{2}$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

et son premier terme : $v_0 = -1$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0 = -1$ alors :

$v_n = v_0 \times q^n = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) On a : $v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n + 2 = u_n$

Et on a : $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

a) Calcul de : $S_n$ en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc :

$$S_n = (\text{le premier terme dans la somme})\frac{1 - \text{raison}^{(\text{le nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

$\text{le nombre de termes} = n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

b) $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et on a : $u_n = v_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $T_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + ... + v_n + 2$

Donc : $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n + \underbrace{(2 + 2 + .... + 2)}_{n+1 \text{ fois } 2}$

Donc : $T_n = S_n + 2(n+1)$

Donc : $\boxed{T_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)}$

**Exercice15 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**1)** Calculer: $u_1$ ; $u_2$ ; $v_0$ et $v_1$

2) Montrer par récurrence que : $u_n \leq \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

4) On pose : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ et $T_n=v_0+v_1+...+v_n$

a) Calculer : $S_n$ en fonction de n

b) En déduire $T_n$ en fonction de n

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{5}{3}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{1}{3}u_0+\frac{5}{3}$

Donc : $u_1=\frac{1}{3}u_0+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times 1+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2$

Donc : $u_1=2$

Pour n=1 on : $u_{1+1}=\frac{1}{3}u_1+\frac{5}{3}$

Donc : $u_2=\frac{1}{3}\times 2+\frac{5}{3}=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

On a : $v_n=u_n-\frac{5}{2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0=u_0-\frac{5}{2}=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$

Donc : $v_0=-\frac{3}{2}$

Pour n=1 on : $v_1=u_1-\frac{5}{2}=2-\frac{5}{2}=\frac{4-5}{2}=\frac{-1}{2}$

Donc : $v_1=-\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $u_n\le\frac{5}{2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0=1\le\frac{5}{2}$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $u_n\le\frac{5}{2}$
- Montrons que : $u_{n+1}\le\frac{5}{2}$ ?

On a : $u_n\le\frac{5}{2}$ donc : $\frac{1}{3}\times u_n\le\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}$

Donc : $\frac{1}{3}\times u_n+\frac{5}{3}\le\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{3}$

Donc : $u_{n+1}\le\frac{5}{6}+\frac{5}{3}$

Donc : $u_{n+1}\le\frac{15}{6}$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\le\frac{5}{2}$

Donc d'après le principe de récurrence :

$u_n\le\frac{5}{2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{5}{3}-u_n=\frac{u_n+5-3u_n}{3}=\frac{-2u_n+5}{3}$

$u_{n+1}-u_n=-2\frac{\left(u_n-\frac{5}{2}\right)}{3}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a : $u_n\le\frac{5}{2}$ donc : $u_n-\frac{5}{2}\le 0$

Donc : $-2\frac{\left(u_n-\frac{5}{2}\right)}{3}\ge 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc :

$u_0\le u_1\le u_2\le.......\le u_n$

Donc : $u_0\le u_n$

Donc : $1\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

**c)** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$ car $u_n\le\frac{5}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $1$ car $1\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ ?

$v_{n+1}=u_n-\frac{5}{2}=\frac{1}{3}u_n+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{u_n}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1}{3}\left(u_n-\frac{5}{2}\right)$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$

et son premier terme : $v_0 = -\frac{3}{2}$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison :

$q = \frac{1}{3}$ et son premier terme : $v_0 = -\frac{3}{2}$

Alors : $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

c) On a : $v_n = u_n - \frac{5}{2} \Leftrightarrow v_n + \frac{5}{2} = u_n$

Et on a : $v_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Donc : $u_n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et

$T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

a) Calcul de : $S_n$ en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc :

$$S_n = (\textit{le premier terme dans la somme})\frac{1-\textit{raison}^{(\textit{le nombre de termes})}}{1-\textit{raison}}$$

$\textit{le nombre de termes} = n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n = -\frac{9}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}$$

b) $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et on a : $u_n = v_n + \frac{5}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $T_n = v_0 + \frac{5}{2} + v_1 + \frac{5}{2} + ... + v_n + \frac{5}{2}$

Donc :

$$T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n + \underbrace{\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + .... + \frac{5}{2}\right)}_{n+1\, fois\, 2}$$

Donc : $T_n = S_n + 2(n+1)$

Donc : $\boxed{T_n = -\frac{9}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{5}{2}(n+1)}$

**Exercice16 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 3}{3u_n + 7} \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et soit la

suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$

**1)** Calculer: $u_1$ ; $v_0$

2) Montrer par récurrence que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

3) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4)a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

d) Calculer en fonction de n la somme suivante : $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{7u_0 + 3}{3u_0 + 7}$

Donc : $u_1 = \frac{7\times2+3}{3\times2+7} = \frac{17}{13}$

Et on a : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : pour n=0 on : $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

2) Montrons que : $1 \le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0 = 2 \ge 1$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $1 \le u_n$
- Montrons que : $1 \le u_{n+1}$ ?

$$u_{n+1} - 1 = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - 1 = \frac{7u_n + 3 - 3u_n - 7}{3u_n + 7} = \frac{4u_n - 4}{3u_n + 7}$$

$$u_{n+1}-1=\frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$$

On a : $0\le u_n$ car $1\le u_n$

Et on a : $1\le u_n$ donc : $0\le u_n-1$

Donc : $\frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}\ge 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $u_{n+1}-1\ge 0$

Donc d'après le principe de récurrence :

$1\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Alors :la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

3)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-u_n=\frac{7u_n+3-u_n(3u_n+7)}{3u_n+7}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{7u_n+3-3u_n^2-7u_n}{3u_n+7}=\frac{3-3u_n^2}{3u_n+7}=3\frac{1-u_n^2}{3u_n+7}$$

$$u_{n+1}-u_n=3\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3u_n+7}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

On a : $0\le u_n$ car $1\le u_n$

Donc :$1+u_n\ge 0$ et $3u_n+7\ge 0$

Et on a : $1\le u_n$ donc : $1-u_n\le 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n=3\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3u_n+7}\le 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) a) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1}{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}+1}=\frac{\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}}{\frac{7u_n+3+(3u_n+7)}{3u_n+7}}=\frac{\frac{4u_n-4}{3u_n+7}}{\frac{10u_n+10}{3u_n+7}}$

$$v_{n+1}=\frac{\frac{4u_n-4}{3u_n+7}}{\frac{10u_n+10}{3u_n+7}}=\frac{4u_n-4}{10u_n+10}=\frac{4}{10}\frac{u_n-1}{u_n+1}=\frac{2}{5}v_n$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{2}{5}=q$ et son premier terme :$v_0=\frac{1}{3}$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{2}{5}=q$ et son premier terme : $v_0=\frac{1}{3}$

Alors : $v_n=v_0\times q^n=\boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

c) on a :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-1\Leftrightarrow v_nu_n+v_n-u_n=-1$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-1-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$$

Et on a : $v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ donc : $u_n=\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

d) Calcul en fonction de n la somme suivante :

$s_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Est géométrique donc :

$$S_n=(\textit{le premier terme dans la somme})\frac{1-raison^{(\textit{le nombre de termes})}}{1-raison}$$

$$\textit{le nombre de termes}=n-0+1=n+1$$

$$S_n=v_0\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n=\frac{5}{9}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}$$

**Exercice17 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}$

Et Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: $u_1$ ; $v_0$

2)Montrer que $0\le u_n\le 3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) a) Montrer que :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+3}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{5u_0+3}{u_0+3}$

Donc : $u_1=\frac{5\times1+3}{1+3}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$

Et on a : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : pour n=0 on : $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$

2) a) Montrons que : $0\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0=1\ge0$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $0\le u_n$
- Montrons que : $0\le u_{n+1}$ ?

On a : $0\le u_n$ et $u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}$ donc $u_{n+1}\ge0$

Donc : $0\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrons que : $u_n\le3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0=1\le3$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $u_n\le3$
- Montrons que : $u_{n+1}\le3$ ?

$$3-u_{n+1}=3-\frac{5u_n+3}{u_n+3}=\frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-2u_n+6}{u_n+3}=\frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

On a : $u_n\le3$ et $0\le u_n$ donc $3-u_{n+1}\ge0$

Donc : $u_{n+1}\le3$

Donc : $0\le u_n\le3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) a)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+3}$$

$\Delta=4+12=16>0$ donc: $x_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-2-4}{-2}=3$

Donc : $-u_n^2+2u_n+3=-(u_n-3)(u_n+1)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+3}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+3}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a : $0\le u_n$ donc $0\prec u_n+3$

On a : $u_n\ge0$ donc $u_n+1\ge0$

Et on a : $u_n\le3$ donc : $u_n-3\le0$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

4) a) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}}=\frac{2u_n-6}{6u_n+6}$

$$v_{n+1}=\frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)}=\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1}=\frac{1}{3}v_n$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=-1$ alors :

$$v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) on a :

$$v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_nu_n+v_n-u_n=-3$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}$$

Et on a : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc : $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

**Exercice 18 :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente

définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3) a) Montrer que :

$$u_{n+1}-u_n = -\frac{(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Solutions :**1) Montrons que $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ????

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$ ??

$$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-2=\dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

donc $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ????

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$ ??

$$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$4-u_{n+1}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a :

$u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3)a)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$ : $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\dfrac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\dfrac{-6-2}{-2}=4$ donc :

$-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) On a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

**Exercice19 :** Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991.
L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.
Les nombres de camion forment une suite.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.

2) Donner la nature de cette suite et préciser le premier terme $u_1$ et la raison de cette suite.

3) Donner l'expression du nombre $u_n$ de camions que possède l'entreprise l'année n.

4) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2023 ?

**Solution :1)** On peut dire que **:** $u_1=40$ c'est le nombre de camions que possède l'entreprise en 1991

Donc **:** le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992 est : $u_2=u_1+8$

C'est-à-dire : $u_2=40+8=48\ camions$

Le nombre de camions que possède l'entreprise en 1993 est : $u_3=u_2+8$

C'est-à-dire : $u_3=48+8=56\ camions$

Le nombre de camions que possède l'entreprise en 1994 est : $u_4 = u_3 + 8$

C'est-à-dire : $u_4 = 56 + 8 = 64\ camions$

2) a) la nature de cette suite : toujours on ajoute le même nombre : $r = 8$

$u_{n+1} = u_n + 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de $r = 8$ et de premier terme $u_1 = 40$

3) L'expression du nombre $u_n$ de camions que possède l'entreprise l'année n. :

On a : $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de $r = 8$ et de premier terme $u_1 = 40$

Donc : on a : $\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n - p)r$

Donc : Pour p=1 on a :

$u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 40 + 8(n-1)$

Donc : $u_n = 40 + 8n - 8$ Donc : $\boxed{u_n = 8n + 32}$

**Remarque :** $u_n = 8n + 32$ donc :

$u_4 = 8 \times 4 + 32 = 32 + 32 = 64$ (déjà trouvé)

4) le nombre de camions que possède l'entreprise en 2023 est :

1991 est : $u_1$ 1992 est : $u_2$ 1993 est : $u_3$

1999 est : $u_9$ 2000 est : $u_{10}$

2001est : $u_{11}$ 2021est : $u_{31}$ 2022est : $u_{32}$

2023est : $u_{33}$

Donc : $u_{33} = 8 \times 33 + 32 = 264 + 32 = \boxed{296}$ camions

**Exercice20 :**Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

**Solution : Les** nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = ...$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait :

$$s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20} = u_1 \frac{1 - 2^{20-1+1}}{1 - 2}$$

$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$

Centimes $s_{20} \simeq 1 million$ 500dh Joli voyage !